

**RAZONAMIENTO COVARIACIONAL CON TECNOLOGÍAS DIGITALES,  
UN CAMINO HACIA EL CÁLCULO**



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA  
NACIONAL**

*Educadora de educadores*

LUIS ALFONSO CASTRO DÍAZ

CARLOS ALBERTO FORERO TORO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA  
BOGOTÁ, DICIEMBRE DE 2019

# **RAZONAMIENTO COVARIACIONAL CON TECNOLOGÍAS DIGITALES, UN CAMINO HACIA EL CÁLCULO**

**LUIS ALFONSO CASTRO DÍAZ**

**Código:2018185003**

**CARLOS ALBERTO FORERO TORO**

**Código:2018185007**

**Informe final de trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magister en  
Docencia de la Matemática**

**DIRECTOR**

**HARRY AUGUSTO GÓMEZ ESPINOSA**

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL  
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA  
BOGOTÁ, DICIEMBRE DE 2019**

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría: en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos”.

(Acuerdo 031 del 2007. Artículo 42. Parágrafo 2.)


**δΣδ1<4+0Υ14\$**

A Luis Alejandro mi hijo, quien con acciones tan simples como una sonrisa, llena de alegría mi vida y me motiva cada vez más a seguir luchando y dando lo mejor de mí. Cada esfuerzo se ve recompensado con verlo feliz.

Luis Alfonso Castro Díaz

A mi esposa Lorena quien con paciencia y amor tuvo que aguantar las duras traspasadas y pies helados en la madrugada; y a mi hija Helen Verónica, quién nació en medio del estudio y en ocasiones traspasamos junto. Gracias por iluminar con sus miradas mis días.

Carlos Alberto Forero Toro

 UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL <small>Formación de líderes</small>	<b>FORMATO</b>	
<b>RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE</b>		
<b>Código: FOR020GIB</b>		<b>Versión: 01</b>
<b>Fecha de Aprobación: 10-10-2012</b>		<b>Página 3 de 7</b>

<b>1. Información General</b>	
<b>Tipo de documento</b>	Trabajo de Grado en Maestría de Profundización
<b>Acceso al documento</b>	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
<b>Título del documento</b>	Razonamiento covariacional con tecnologías digitales, un camino hacia el cálculo
<b>Autor(es)</b>	Castro Díaz, Luis Alfonso; Forero Toro, Carlos Alberto
<b>Director</b>	Gómez Espinoza, Harry Augusto
<b>Publicación</b>	Bogotá D.C., 2019, págs. 135
<b>Unidad Patrocinante</b>	Universidad Pedagógica Nacional
<b>Palabras Claves</b>	RAZONAMIENTO COVARIACIONAL, COVARIACIÓN, ACCIONES MENTALES, INSTRUMENTACIÓN, ARTEFACTO, HERRAMIENTA, IMÁGENES DE COVARIACIÓN, TECNOLOGÍAS DIGITALES

<b>2. Descripción</b>
<p>El objetivo de este trabajo de grado es rastrear las acciones mentales que dan cuenta del razonamiento covariacional, que surgen en un ambiente mediado por tecnología digital al momento de resolver tareas de carácter dinámico donde la covariación está presente. La estrategia metodológica implementada fue la entrevista basada en tareas y se abordó un enfoque fenomenológico – interpretativo. Se reportan las acciones mentales de cuatro parejas de estudiantes (de grado noveno y décimo), dos de un colegio de carácter privado de Bogotá y las otras dos de un colegio de carácter público de un municipio de Cundinamarca. Los participantes no han tenido acercamientos a cursos de cálculo. Los resultados anuncian que las tecnologías digitales pueden favorecer las acciones mentales y en consecuencia los procesos de razonamiento covariacional fundamentales para la comprensión del cálculo a partir del manejo de herramientas instrumentadas. Finalmente, a partir de los hallazgos, se propone una ampliación al marco conceptual propuesto por Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., &amp; Hsu, E. (2003). referido al razonamiento covariacional.</p>

### 3. Fuentes

Para la elaboración del trabajo fueron consultadas 42 fuentes teóricas, de las cuales se resaltan aquellas de mayor incidencia en el planteamiento del problema y construcción del marco teórico.

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a Reflection about instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245 - 274.
- Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. En Mancera E. y Pérez C. (Eds.) *Memorias de la XII Interamericana de Educación Matemática* 12, 9 - 21.
- Carlson, M. (1998). A Cross - Sectional Investigation of the Development of the Function Concept. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 114 - 162.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (5), 352 - 378.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio. *Revista EMA*, 8 (2), 121-156.
- Fiallo, J. y Parada, S. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista Científica.*, 56 - 71.
- Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio Dinámico del cambio y la Variación, curso de precálculo mediado por GeoGebra*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- Grueso, R. y González, G. (2016). El concepto de función como covariación en la escuela. *Tesis de Maestría*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Jonhson, H. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Bahavior*, 31, 313 - 330.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares. Área de Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*. Bogotá, D.C.: MEN, Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.
- Montero, J. y Parada, G. (2016). *Propuesta para desarrollar el pensamiento variacional en la modalidad B-learning (trabajo de grado Licenciatura en Matemáticas)*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Saldanha & Thompson. (1998). Re- thinking covariation from a quantitative perspective: simultaneous continuous variation. *Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PMA* (págs. 298 - 306). North Carolina, USA: North Carolina State University.

- Trouche, L. (2005). An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. In: Guin D., Ruthven K., Trouche L. (eds) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. 36, págs. 137 - 162. Springer, Boston, MA.
- Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas (8-10 May 2002)*. Bogotá.

#### 4. Contenidos

El primer capítulo presenta la problemática identificada y la justificación del trabajo de investigación, en él se explica por qué es importante dar solución a la problemática. Se presentan estudios antecedentes que surgieron a partir de la búsqueda en la literatura, donde se hizo énfasis en dos aspectos; el primero, identificar los estudios y problemáticas asociadas al razonamiento covariacional; y el segundo, en reconocer cómo la tecnología ha contribuido en la exploración, comprensión y formulación de conceptos matemáticos en los que se involucran la variación y la covariación.

El segundo capítulo exhibe el marco teórico en dos ejes principales: el razonamiento covariacional y un enfoque teórico con relación a los usos de la TD.

El tercer capítulo se presenta la metodología, el enfoque, la aproximación, la estrategia investigativa y el contexto experimental empleados en este estudio, que fueron utilizados para rastrear cómo razonan covariacionalmente los estudiantes a la hora de resolver una situación simulada con tecnología digital.

El cuarto capítulo exhibe las respuestas de los estudiantes (organizadas en tablas), el análisis realizado sobre las mismas y los principales resultados de la investigación. El análisis, se realizó teniendo como referente el marco conceptual sobre el razonamiento covariacional propuesto por Carlson et al. (2003), abordado desde una perspectiva instrumental. En los resultados, a partir de las evidencias y el análisis, se propone una ampliación al marco conceptual mencionado anteriormente.

Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones del trabajo realizado, en términos del objetivo general y específicos y recomendaciones para futuros estudios.

#### 5. Metodología

La estrategia metodológica que se estableció para alcanzar el objetivo planteado fue la entrevista basada en tareas con enfoque fenomenológico-interpretativo. Debido a que, en ella, el investigador debe concentrar esfuerzos en observar los procesos de razonamiento, en evidenciar el pensamiento, las interacciones, las conversaciones y diferentes producciones realizadas por un sujeto o un pequeño grupo de sujetos frente a una misma tarea. Para poner en funcionamiento este tipo de estrategia, se adaptaron tres tareas para rastrear cómo razonan covariacionalmente los estudiantes a la hora de resolver una situación simulada con tecnología digital, en la que los estudiantes debían poner en juego el rol de resolutor de la situación y actuar de manera natural procurando expresar sus pensamientos y estrategias; mientras que el investigador, por su lado, podía interactuar, en ciertos momentos con los estudiantes por medio de preguntas específicas con el fin de encontrar evidencias de la acción cognitiva.

### 6. Conclusiones

Dentro de las conclusiones del presente trabajo se destacan algunas como:

- Las acciones mentales identificadas se vieron potencializadas en cuanto a su desarrollo, por el uso de herramientas instrumentadas presentes en el programa GeoGebra como es el caso del deslizador y la interacción con el usuario.
- A partir del análisis y rastreo realizado, se encontraron dos acciones mentales no reportadas por Carlson et al. (2003).
- Se propone una ampliación al marco conceptual propuesto por Carlson et al. (2003) que emerge a partir de acciones materiales instrumentadas que fueron movilizadas por el uso de la TD.

<b>Elaborado por:</b>	Castro Díaz, Luis Alfonso; Forero Toro, Carlos Alberto
<b>Revisado por:</b>	Gómez Espinosa, Harry Augusto

<b>Fecha de elaboración del Resumen:</b>	08	12	2019
--	----	----	------



## CONTENIDO

Introducción .....	1
1    Capítulo uno: Planteamiento del problema.....	3
1.1    Justificación.....	3
1.2    Antecedentes .....	6
1.2.1    Marco legal colombiano .....	6
1.2.2    Comparación de planes de estudio.....	8
1.2.3    Antecedentes de investigación sobre la covariación.....	10
1.2.4    Antecedentes de investigación sobre el uso de tecnología en el estudio de variación y covariación.....	14
1.3    Planteamiento del problema .....	17
1.4    Objetivos .....	19
1.4.1    Objetivo general.....	19
1.4.2    Objetivos específicos .....	19
2    Capítulo dos - Marco teórico .....	20
2.1    Razonamiento covariacional .....	20

2.1.1	Covariación .....	21
2.1.2	Razonamiento covariacional .....	22
2.1.3	Acciones mentales .....	23
2.1.4	Niveles de razonamiento covariacional .....	28
2.1.5	Pensamiento pseudo analítico .....	30
2.2	Perspectiva Instrumental .....	31
2.2.1	Herramienta.....	32
2.2.2	Artefacto / Instrumento / Instrumentalización e Instrumentación .....	32
2.2.3	Tecnología Digital - GeoGebra como herramienta instrumentada .....	34
3	Capítulo tres: Marco metodológico .....	36
3.1	Estrategia investigativa .....	36
3.2	Contexto experimental .....	38
3.3	Pilotaje.....	38
3.4	Fases de estudio.....	40
3.4.1	Preparación de la entrevista .....	40
3.4.2	Tareas .....	40
3.4.3	Herramienta de categorización .....	49

3.5	Recolección de la información .....	50
3.6	Recolección de datos .....	51
3.7	Análisis de datos.....	51
3.8	Criterios de calidad.....	52
4	Capítulo cuatro: Respuestas, Análisis y Resultados .....	53
4.1	Respuestas y análisis .....	53
4.1.1	Industria alimenticia.....	53
4.1.2	El cliente cansón .....	72
4.1.3	Central de servicios.....	86
4.2	Resultados .....	113
4.2.1	Acciones mentales intermedias.....	113
4.2.2	Tabla de resumen de presencia de acciones mentales .....	114
4.2.3	Acciones mentales instrumentadas. AMI .....	116
5	Capítulo cinco: Conclusiones .....	119
5.1	General .....	119
5.2	Específicas.....	119
5.3	Recomendaciones para futuros estudios .....	126

6	Referencias.....	127
7	Anexos .....	133
7.1	Anexos grado 9° - Institución Privada- tareas 1, 2 y 3.....	133
7.2	Anexos grado 10° - Institución Privada- Tareas 1, 2 y 3 .....	143
7.3	Anexos grado 9° - Institución de carácter Público- Tareas 1, 2 y 3 .....	151
7.4	Anexos grado 10° - Institución de carácter Público- Tareas 1, 2 y 3 .....	161

## INDICE DE TABLAS

Tabla 1: Acciones mentales - Razonamiento covariacional .....	23
Tabla 2: Niveles - razonamiento covariacional .....	28
Tabla 3: Preguntas – industria alimenticia.....	43
Tabla 4: Preguntas - central de servicios Tanque A .....	47
Tabla 5: Preguntas - central de servicios Tanque B.....	48
Tabla 6: Herramienta de categorización .....	49
Tabla 7: Respuestas y análisis - Tarea 1 Grado noveno .....	54
Tabla 8: Respuestas y análisis - Tarea 1 Grado décimo .....	62
Tabla 9: Respuestas y análisis - Tarea 2 Grado noveno .....	72
Tabla 10: Respuestas y análisis - Tarea 2 Grado décimo .....	79
Tabla 11: Respuestas y análisis - Tarea 3, Grado noveno, tanque A.....	86
Tabla 12: Respuestas y análisis - Tarea 3, Grado noveno, tanque B .....	92
Tabla 13: Respuestas y análisis - Tarea 3, Grado décimo, tanque A.....	98
Tabla 14: Respuestas y análisis - Tarea 3, Grado décimo, tanque B .....	105
Tabla 15: Resumen AM “Industria alimenticia” .....	114

Tabla 16. Resumen AM “El cliente cansón” .....	115
Tabla 17 Resumen AM "Central de Servicios" .....	115
Tabla 18: Acciones mentales instrumentadas asociadas al razonamiento covariacional .....	116

## INDICE DE IMAGÉNES

Imagen 1: Instrumento .....	33
Imagen 2: instrumentalización - instrumentación.....	33
Imagen 3: lámina - caja sin tapa .....	42
Imagen 4: simulación - caja sin tapa en GeoGebra.....	43
Imagen 5: Simulación - Cubo en expansión .....	45
Imagen 6: Simulación - central de servicios Tanque A .....	47
Imagen 7: Simulación - central de servicios Tanque B .....	48
Imagen 8: Respuestas - tarea 1 - p3-inst_A - G9 .....	55
Imagen 9: Respuestas - tarea 1 - p4-inst_A - G9 .....	56
Imagen 10: Respuestas - tarea 1 - p7-inst_A - G9 .....	60
Imagen 11: Respuestas – tarea 1 - p7-inst_B - G9.....	60
Imagen 12: Respuestas - tarea 1 - p7-inst_A - G10 .....	70
Imagen 13: Respuestas - tarea 1 - p7-inst_B - G10 .....	70
Imagen 14: Respuestas - tarea 3 - p3-inst_A - G9 – tanque A .....	88
Imagen 15: Respuestas - tarea 3 - p3-inst_B - G9 – tanque A.....	88

Imagen 16: Respuestas – tarea 3 - p4 – inst A - G9 – tanque A .....	90
Imagen 17: Tabla LP TB instB .....	93
Imagen 18: Respuestas - tarea 3 - p3-inst_A - G9 – tanque B.....	95
Imagen 19: Respuestas – tarea 3 - p3-inst_B - G9 – tanque B .....	95
Imagen 20: Respuestas - tarea 3 - p3-inst_A - G10 – tanque A .....	100
Imagen 21: Respuestas - tarea 3 - p3.1-inst_B - G10 – tanque A.....	100
Imagen 22: Respuestas - tarea 3 - p3.2-inst_B - G10 – tanque A.....	101
Imagen 23: Respuestas – tarea 3 - p3-inst_A - G10 – tanque B .....	108
Imagen 24: Respuestas - tarea 3 - p3-inst_B - G10 – tanque B.....	108



## INTRODUCCIÓN

El estudio de la covariación y su importancia en el aprendizaje del cálculo es un tema que ha sido de interés para la comunidad académica en Educación Matemática. Como profesores de matemáticas pertenecientes a esta comunidad y partir de la experiencia como docentes de esta área en la educación básica y media en Colombia, surgió el interés de los autores de este trabajo por investigar sobre cómo afrontar las dificultades que presentan los estudiantes en el proceso de aprendizaje del cálculo; en particular de aquellas asociadas a la comprensión de la razón de cambio y la falta de análisis covariacional.

Se reconoce cierto potencial de las Tecnologías Digitales (TD) ya que éstas permiten el estudio de situaciones de carácter dinámico de una manera diferente a la tradicional. Se establece entonces la posibilidad de indagar sobre los efectos que tiene el uso de la TD en el razonamiento covariacional (RC) de los estudiantes en grados anteriores a los que habitualmente se brinda un curso de cálculo.

Surge el cuestionamiento sobre ¿Cómo razonan covariacionalmente los estudiantes frente a una situación simulada con tecnología? Esta pregunta constituye el eje del desarrollo de la presente investigación, cuyo propósito es rastrear y describir las acciones mentales asociadas al razonamiento covariacional, que surgen en situaciones simuladas con TD, al momento en que algunos estudiantes de grados 9° y 10° se enfrentan a problemas dinámicos.

Así entonces, en los siguientes capítulos se amplía el desarrollo de la investigación. En el capítulo 1 se presenta la justificación, los estudios antecedentes, el objetivo general y los objetivos específicos de investigación. En el capítulo 2 se presentan los referentes teóricos

respectivos al razonamiento covariacional y la perspectiva instrumental, que se encarga de abordar la influencia de la tecnología en la consolidación del conocimiento. En el capítulo 3 se encuentra el marco metodológico establecido para la investigación, presentando así la estrategia investigativa, el contexto en el cual se desarrolla la propuesta, las fases de estudio, el diseño y adaptación de las tareas asociadas al razonamiento covariacional, los instrumentos de recolección de la información y la herramienta para el análisis de los datos. En el capítulo 4 se informa sobre los principales resultados de la investigación y el análisis realizado. En el capítulo 5 se exhiben las conclusiones del estudio y las recomendaciones para futuros trabajos asociados al tema. Finalmente, se presentan las referencias usadas y los anexos.

# **1 CAPÍTULO UNO: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

En este capítulo se exhibe la problemática identificada y la justificación del trabajo de investigación, explicando por qué es importante dar solución a la problemática. Se presentan estudios antecedentes que surgieron a partir de la búsqueda en la literatura donde se hizo énfasis en dos aspectos; el primero, identificar los estudios y problemáticas asociadas al razonamiento covariacional; y el segundo, en reconocer cómo la tecnología ha contribuido en la exploración, comprensión y formulación de conceptos matemáticos en los que se involucran la variación y la covariación. Seguidamente se plantea la pregunta de investigación y los objetivos, general y específicos a alcanzar con el desarrollo del trabajo.

## **1.1 Justificación**

A partir de la experiencia de los autores de este trabajo como docentes de matemáticas en la educación básica secundaria y media vocacional en Colombia, se reconoce una dificultad asociada a la comprensión del cálculo, esta es la falta de análisis covariacional, que puede obstaculizar la comprensión de la razón de cambio. Fiallo y Parada (2014) reportaron dicho obstáculo que se hace evidente cuando los estudiantes acceden a estudiar carreras profesionales, donde se presenta alto índice de pérdida y deserción escolar en los seminarios de cálculo, debido a los bajos resultados y valoraciones obtenidas en trabajos, exámenes, sustentaciones y en general procesos realizados durante los semestres académicos.

Otras dificultades identificadas a partir de la experiencia de los autores de este trabajo son: 1- al arraigo en el manejo de cantidades enteras usadas por los estudiantes para la realización de los

gráficos. 2- La dificultad al momento de cuantificar las variaciones del fenómeno estudiado. 3- La carencia de visualización de “variaciones” muy pequeñas o muy grandes en situaciones de cambio, de una manera “medianamente real”. 4- La difícil tarea de realizar los cálculos aritméticos para encontrar y cuantificar los cambios.

Todas las anteriores dificultades son asociadas principalmente al pensamiento variacional, sobre el cual Vasco (2002) expone que puede describirse como una forma de pensar dinámica, que no consiste en dibujar gráficas, pues estas “paralizan” la covariación y hacen que los procesos se centren en la forma estática de la gráfica realizada.

“El objeto del pensamiento variacional es pues la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad” (Vasco, 2002, p.63)

El autor utiliza el ejemplo de un profesor que sostiene una pelota en cada mano, las lanza al aire alternadamente, sin hacer malabares y el estudiante intenta caracterizar la variación de cada una simultáneamente en el tiempo, luego intenta analizar la covariación de una pelota con respecto a la otra reconociendo múltiples variables. También señala que las representaciones utilizadas en muchos casos son estáticas y que el planteamiento de las fórmulas es una tarea muy difícil, por tanto, los experimentos y ensayos de los estudiantes en muchos casos fracasan y el pensamiento variacional queda “atascado”, ocasionando desánimo y abandono de la tarea. Por lo anterior se identifica en las TD un potencial enorme que puede beneficiar los procesos de enseñanza-aprendizaje de objetos matemáticos como variación, covariación y razón de cambio, usualmente abordados en cálculo.

En este sentido, según Gómez (1997), aunque la tecnología no es la solución a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, su uso adecuado en la resolución de problemas permite a los estudiantes realizar el análisis de los casos particulares de los problemas, dado que facilita la observación y el reconocimiento de los fenómenos existentes y posibilita generar una serie de representaciones gráficas y dinámicas, además de permitir el cálculo de operaciones y encontrar valores de manera muy rápida y exacta. Sin embargo, se pueden presentar algunos aspectos negativos, por ejemplo, que los estudiantes puedan ver los objetos matemáticos a partir de sus representaciones y características gráficas dejando de lado el aspecto simbólico, lo que los lleva a concebir y a tener una visión parcial de los mismos. En esta dirección, Gómez y Carulla (1998) plantean que un uso excesivo de la tecnología puede generar como consecuencia la aparición de obstáculos epistemológicos que pueden dificultar el progreso apropiado para la construcción del conocimiento matemático.

Debido a lo anterior, constituye un interés fundamental aportar al campo investigativo de la educación matemática, con un estudio que permita ampliar el marco teórico correspondiente al razonamiento covariacional. Un valor agregado de este trabajo es contar con el uso de TD, además de realizar el estudio con estudiantes de educación básica (grados 9° y 10°) que en el currículo colombiano no han recibido formación en cursos de cálculo. En las secciones siguientes, se ampliará la información acerca de los estudios antecedentes, el planteamiento del problema de investigación y los objetivos del trabajo.

## 1.2 Antecedentes

En este apartado se exhiben algunos referentes de investigación. Se tuvo en cuenta el marco legal colombiano, comparación entre los planes de estudio de dos instituciones educativas, investigaciones relacionadas con el razonamiento covariacional y documentos asociados hacia el uso de TD y sus aportes en la exploración, comprensión y formulación de conceptos matemáticos en los que se involucran la variación y la covariación. Los antecedentes relacionados ayudaron a la consolidación de la pregunta de investigación.

### 1.2.1 Marco legal colombiano

Se revisó el marco legal colombiano dictaminado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en su documento Lineamientos curriculares (1998). En este documento, se resalta que el estudio de la variación puede ser iniciado de manera temprana en grados escolares de primaria y que el significado y sentido sobre la misma, se puede establecer a partir de situaciones referidas a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. Las situaciones propuestas y los números empleados deben ser controlados para que los estudiantes no entren en contradicciones y dentro de las actividades planteadas debe estar el reconocimiento de patrones y la cuantificación del cambio. Con respecto al uso de tecnología en el documento de los lineamientos se hace hincapié en que las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas y permiten enriquecer y evolucionar el currículo con nuevas prácticas y tendencias.

Se revisó también el documento de Estándares Básicos de Competencias (EBC) propuestos por el MEN (2006), en donde se define al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y

analíticos como “el pensamiento que tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variable y el cambio en diferentes contextos” (p. 66).

Además, propone desarrollar este pensamiento desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria con actividades en las que se involucre:

Analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor de una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre las forma o el valor del siguiente término de la secuencia, o mejor sobre los dos o tres términos siguientes, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los términos siguientes, confirmar o refutar la conjeturas iniciales e intentar generalizarlas [...] en la Educación Básica Secundaria, se expresan por otros tipos de representaciones como los gestuales, las numéricas (tablas), las gráficas (diagramas) y las icónicas que actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos. (p. 67)

De igual forma, se revisó el documento de los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), (MEN, 2016), donde se observó que para el grado undécimo existen 17 enunciados, se analizó uno de ellos (el tercer DBA), cuyo enunciado es el siguiente:

Interpreta la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función  $f(x)$  en un punto  $A = (a, f(a))$  como el límite de las pendientes de las rectas secantes entre el punto  $A$  y puntos sobre la gráfica que se acercan a  $A$ . Es decir, como:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Utiliza esto para estimar la razón de cambio instantánea  $f'(a)$  para un valor particular de  $a$ . (MEN, 2016, p. 1)

Se analizó este enunciado, en donde se evidencia la capacidad de dar sentido o significado a la derivada como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función  $f(x)$  en un punto  $A = (a, f(a))$  como  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ . Teniendo en cuenta lo planteado por Gómez y Velazco (2017), se considera que la manera en que se presenta esta aproximación a la derivada es

limitada, ya que facilita el manejo algorítmico, pero no involucra el análisis de los fenómenos de variación.

Haciendo una lectura de los contenidos de los 17 DBA para el grado undécimo, se encuentra que se presentan en el siguiente orden: números, límites, funciones, continuidad, derivadas y aplicaciones. Según Fiallo y Parada (2018), “ese orden esconde – y - esconde mal, una organización que va de lo simple a lo más complejo desde el punto de vista lógico, pero no desde el punto de vista cognitivo” (p, 26)

Se identifica que mientras en los EBC se propone desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros niveles de educación básica secundaria, en los DBA no se encuentran actividades que realmente potencien el pensamiento variacional desde el estudio de fenómenos de variación y covariación. Estas incoherencias según Gómez y Velazco (2017) generan una complejidad en términos de los contenidos abordados y las capacidades que se esperan que los estudiantes desarrollen.

### 1.2.2 Comparación de planes de estudio

Como los autores de este trabajo laboran en instituciones educativas con características y dinámicas diferentes, surgió la necesidad de realizar comparaciones entre los planes de estudio, con el propósito de reconocer en que grados se tiene establecido desde la malla curricular acercamientos a cursos de cálculo. Lo anterior para garantizar que los estudiantes participantes no hubiesen tenido acercamientos a dichos cursos, pero que contaran con un universo numérico suficiente para entender los problemas y herramientas discursivas y cognitivas para justificar sus respuestas. De esta forma se decidió elegir estudiantes de grados 9° y 10°.



De este modo, se realiza el análisis de los planes de estudio de una institución educativa de carácter privado ubicada en la ciudad de Bogotá y de una institución educativa de carácter público ubicada un municipio de Cundinamarca.

En la revisión del plan de estudios de la institución de carácter privado, se encontró que no se tiene en cuenta el proceso de análisis covariacional como trabajo importante al momento de abordar las funciones; se presentan temáticas como factorización, ecuaciones lineales y cuadráticas, función lineal, afín cuadrática, exponencial, logarítmica y sus representaciones, análisis de límites, continuidad, razón de cambio promedio, instantánea y decanta en derivadas y métodos de derivación. Nótese que están organizados según la secuencia “lógica” de temáticas planteada en los estándares curriculares y aunque se manifiestan esfuerzos por trabajar con tecnologías, no se evidencia que existan procesos de conceptualización mediante el estudio de la variación ni la covariación.

En la revisión del plan de estudios de la institución educativa de carácter público, se encontró que tampoco se tiene en cuenta el proceso de análisis covariacional para el trabajo con funciones, sino que son abordadas de manera algorítmica, como una relación de dependencia de un conjunto de salida a un conjunto de llegada. En las temáticas planteadas, se reconoce que estas se enfocan al desarrollo de procesos algorítmicos de los límites, continuidad de una función, derivadas, entre otros. Además, no se manifiesta que la variación ni la covariación estén presentes en el desarrollo de estos, nótese que las temáticas también están organizadas en una secuencia “lógica” que aparentemente van de lo más simple a lo más complejo. De igual forma no se evidencia el uso de las tecnologías digitales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular del cálculo.

El trabajo desde el análisis de la variación es fundamental para comprensión de las funciones y las razones de cambio. Así mismo, el análisis covariacional es fundamental para la comprensión de la razón de cambio en sus diferentes definiciones e interpretaciones. A pesar de que en los lineamientos y estándares curriculares se propone el análisis variacional desde los primeros grados de primaria, se encontró que, aunque se menciona la variación en las planeaciones e indicadores de aprendizaje planteados en cada institución, ninguno de los dos colegios reconoce la covariación y el análisis covariacional como parte fundamental en el estudio del concepto de función, y que las temáticas se encuentran organizadas en una secuencia que va desde los más simple a lo más complejo, sin que se evidencie cómo están entrelazadas unas con otras, ni que existan procesos de conceptualización mediante la variación ni la covariación.

### 1.2.3 Antecedentes de investigación sobre la covariación

En el presente apartado se presentan algunos referentes antecedentes encontrados a partir de una búsqueda en la literatura sobre problemáticas asociadas al razonamiento covariacional. Dentro de los trabajos consultados se resaltan:

- Grueso y González (2016) exponen como una problemática, que en la actualidad se sigue abordando el concepto de función desde una perspectiva de correspondencia o de asignación y esta obedece a ideas algorítmicas o estáticas, en donde la enseñanza de la función se hace algebraicamente, dando la fórmula y reemplazando valores. Esta problemática los llevó a formular la pregunta ¿qué elementos o rasgos del concepto de función se identifican, en un grupo de estudiantes de grado 9º, a través del desarrollo de situaciones problema de covariación? Para dar respuesta a esta pregunta, presentan y desarrollan una propuesta para el estudio de la función a través de situaciones en donde la covariación está presente. Los

autores diseñaron una propuesta de aula, que se aplicó a estudiantes de grado noveno, la cual buscaba potencializar, a través de tareas de covariación, el desarrollo del pensamiento variacional, ya que dicho pensamiento se caracteriza por el estudio de la variación y el cambio en diferentes contextos. Dentro de dichas tareas se estudió el concepto de función, a través del uso y articulación de diversos registros de representación. Una vez realizada la implementación, caracterizaron y analizaron las actuaciones de los estudiantes, los sistemas matemáticos de signos y los aspectos matemáticos involucrados en las acciones mentales y niveles de razonamiento covariacional propuestos por Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Finalmente, hicieron conclusiones generales como:

Con las tareas de variación, específicamente, con la consideración de la razón de cambio, se logró que los estudiantes tuvieran acercamientos importantes a la comparación de los cambios.

La puesta en escena de tareas en torno a la covariación permitió que los estudiantes, con preguntas específicas se fueran encaminando y obteniendo avances en las formas del razonamiento que usaban. En dichos razonamientos fue evidente el acercamiento a nociones asociadas al concepto de función, dominio, rango, máximos y mínimos relativos, monotonía en el comportamiento creciente o decreciente de una función. (Grueso y González, 2016, p. 245)

- Mendoza, Ferrari y Méndez (2017) reportaron una experiencia de investigación cuyo objetivo fue desarrollar argumentos matemáticos a partir de situaciones de modelación y covariación. Los diseños de aprendizaje que desarrollaron están sustentados en la Teoría Socioepistemológica, que sostiene que las construcciones de conocimiento son una producción social que transforma la sociedad. Diseñaron varias propuestas como el estudio del movimiento rectilíneo uniforme, caracterización de funciones polinómicas, estudio de la función exponencial, logarítmica y la función seno, las cuales se aplicaron a estudiantes de licenciatura matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, con los que se buscaba

evidenciar el desarrollo de argumentos matemáticos a partir de situaciones de covariación y modelación. En las conclusiones reportan que:

El estudio de la modelación y la covariación que en un principio era inconsistente por parte de los participantes y que a medida que fueron avanzando durante sus actividades lograron observar con más claridad que representa dos formas de aprender matemáticas muy importantes [...] los estudiantes experimentaron una visión de la enseñanza de las matemáticas muy diferente a la que están acostumbrados a ver en el aula de clase [...] lo que experimentaron los participantes es que fácilmente ellos pueden tomar una situación de su vida cotidiana y la pueden transportar a un plano numérico, y a partir de ello crear un problema matemático que realmente se ajuste a la realidad de las cosas. (Mendoza, Ferrari y Méndez, 2017, p. 19)

- Fiallo y Parada (2014) identificaron la problemática de altos índices de repitencia y deserción en el espacio académico de Cálculo diferencial, de las carreras de ingeniería y ciencias de la Universidad Industrial de Santander (UIS). Para abordar esta problemática plantearon y diseñaron un curso de precálculo cuyo propósito fue desarrollar el pensamiento variacional relacionado con el tratamiento matemático de la variación y el cambio, mediante representaciones generadas por GeoGebra, a partir de un enfoque de resolución de problemas. Este curso está dirigido a estudiantes de primer semestre de la UIS que obtuvieron los resultados más bajos en una prueba de caracterización. Para la realización de este proyecto requirieron de tres momentos: en el primer momento, se realizó el diseño de las actividades, en donde se buscó promover la resolución de problemas que involucran el razonamiento, la comunicación, las representaciones y uso de las tecnologías, alrededor de la variación y la acumulación. En el segundo momento, se desarrolló el curso durante 14 sesiones de cuatro horas, durante el receso académico, y, en el tercer momento, se utilizaron instrumentos de control y evaluación, con el que pretendían integrar la evaluación al proceso de enseñanza y aprendizaje, utilizando indicadores que evidenciaban aspectos relevantes en el aprendizaje de

los estudiantes. En las conclusiones reportan que el curso de precálculo se debe ver como un acercamiento intuitivo y empírico a los conceptos fundamentales del cálculo y no como un curso que pretenda llenar los vacíos conceptuales que no se aprendieron en la básica secundaria.

- Johnson (2012), partiendo del trabajo presentado por Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002), asocia que el bajo desempeño de los estudiantes al momento de representar gráficamente la cantidad de altura en función de la cantidad de volumen para una botella de llenado de ancho variable se debe, en parte, a las diferencias en las formas en que los estudiantes coordinan las cantidades covariables. De esta premisa surge la pregunta de investigación, ¿cómo los estudiantes pueden razonar acerca de la variación en la intensidad de un cambio? Los autores investigaron cómo un estudiante de secundaria, que no había tomado un curso de cálculo, razonaba acerca de las cantidades constantes y variables involucradas en tasas de cambio, al trabajar en tareas matemáticas que usaban múltiples representaciones de cantidades covariables... Los hallazgos sugieren que, al variar sistemáticamente una cantidad, un individuo podría atender simultáneamente la variación en la intensidad del cambio en una cantidad que indica una relación entre las cantidades covariables. Los resultados documentan cómo el estudiante razonó numérica y no numéricamente sobre las cantidades covariables involucradas en la razón de cambio de una manera matemáticamente poderosa y, sin embargo, no se basó en la razón. Analizó cómo la coordinación del razonamiento covariacional y transformacional apoya la variación en la intensidad del cambio en las cantidades involucradas en la razón de cambio

#### 1.2.4 Antecedentes de investigación sobre el uso de tecnología en el estudio de variación y covariación.

Este apartado presenta algunos estudios antecedentes encontrados en la literatura a partir de la pregunta ¿cómo la TD ha contribuido en la exploración, comprensión y formulación de conceptos matemáticos en los que se involucran la variación y la covariación? Se resaltan los siguientes trabajos:

- García (2009) reporta que los estudiantes a pesar de haber cursado materias de cálculo presentan dificultades a la hora de obtener información de la gráfica de una función, identificar los intervalos en los que es creciente o decreciente. En el desarrollo de la investigación participaron estudiantes de ingeniería quienes habían tomado cursos de álgebra, trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial e integral. En dicho trabajo se plantearon problemas matemáticos relacionados con la variación, los cuales debían resolver empleando hojas de cálculo en Excel. Se analizó un problema en particular donde los estudiantes comparaban dos planes de telefonía celular para contratar un servicio. Los resultados mostraron que cuando los estudiantes no están familiarizados con el uso del programa en Excel, recurren al lápiz y al papel para intentar reproducir y justificar lo que están trabajando, o para elaborar una tabla del costo de cada plan; obtienen los valores haciendo uso de una calculadora e introducen dichos valores en cada una de las celdas de Excel, procedimiento que refleja desaprovechamiento de todo el potencial que tiene el recurso digital. Por otro lado, también se evidencia que cuando los estudiantes emplean la herramienta digital, esta contribuye al proceso de construcción de la idea de variación y a la formulación de modelos matemáticos, debido a que pueden ser utilizadas no solo como una herramienta de exploración sino también como fuentes de información que facilita el desarrollo conceptual.

- Ávila (2011) evidenció la problemática que, en los textos escolares, el tratamiento de las funciones carece de aspectos variacionales, limitando el estudio a aspectos algebraicos y características analíticas de las mismas; por esta razón, indaga acerca de cómo razonan covariacionalmente los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de variación a través de software dinámico. Realizó un estudio de caso en el que buscó trabajar los conceptos de función lineal y función cuadrática mediante la implementación de software dinámico como GeoGebra y Modellus. Para el desarrollo de la investigación realizó tres guías de trabajo y seleccionó a tres estudiantes de grado décimo con el fin de aplicar las pruebas diseñadas, y con quienes realizó un seguimiento a la manera en cómo abordaron las situaciones en las que intervenían fenómenos de covariación presentes en las funciones lineales y cuadráticas, enfocando la atención en la manera cómo el uso de software dinámico fomenta el razonamiento covariacional. Los resultados fueron analizados bajo el marco teórico del razonamiento covariacional propuesto por Carlson et al. (2003). Dentro de las conclusiones que reportó que las actividades que fueron representadas por los softwares dinámicos permitieron la manipulación, observación y representación. Lo anterior permitió a los estudiantes elaborar diferentes conjeturas y comprobar o validar las construcciones realizadas. Finalmente, recomienda la implementación de estas actividades en el aula de clase para trabajar conceptos como función lineal y cuadrática, dejando a un lado los métodos tradicionales de enseñanza.
- Forero y López (2012) observaron los procesos tempranos de comprensión de la noción de razón de cambio con estudiantes de grado 6°, para hacerlo realizaron una implementación de actividades mediadas con GeoGebra 4.0. que fueron diseñadas para introducir la razón de cambio y potenciar aspectos relacionados al aprendizaje del concepto de derivada y el

desarrollo del pensamiento variacional. Abordaron aspectos sobre predicción de patrones de regularidad, relaciones en series aritméticas, correlación de magnitudes y una actividad de comparación de velocidades de llenado de varios envases y los estudiantes debían manipular varias herramientas proporcionadas por el programa, entre ellas la herramienta “deslizador”. Dentro de las conclusiones reportadas manifiestan que el trabajo temprano con programas computacionales puede ayudar a la comprensión de la razón de cambio, debido a que el aspecto visual se hace más amigable y el proceso de observación de regularidades y patrones se puede repetir varias veces, pero sin correr el peligro de cometer una equivocación, lo cual, en caso de darse, obstaculiza los procesos de abstracción.

Esta búsqueda documental permitió identificar diferentes problemáticas que están presentes a la hora de abordar el concepto de función, y la manera en cómo se les da tratamiento haciendo uso de TD, además de identificar algunas ventajas y desventajas que las tecnologías tienen en el desarrollo del razonamiento covariacional. Se reconocen algunas bondades como que gracias a la manipulación, representación y observación usando TD, se facilita la elaboración de conjeturas, además, que contribuye al proceso de construcción de la idea de variación y la formulación de modelos matemáticos; debido a que más allá de ser utilizadas como herramientas de exploración, se pueden emplear como una fuente de información. Se reconocen también algunas desventajas, por ejemplo, en el caso que los estudiantes no estén familiarizados con las herramientas, pueden recurrir al lápiz y papel o abandonar el problema.



### 1.3 Planteamiento del problema

Como se mencionó en apartados anteriores, a partir de la experiencia de los autores de este trabajo como docentes de matemáticas, se reconocen algunas dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo. Dentro de las dificultades evidenciadas está la falta de análisis covariacional que se asocia a la comparación entre los cambios de las magnitudes involucradas cuando se evocan comportamientos cambiantes, lo cual puede obstaculizar la comprensión del concepto de función y en consecuencia de la razón de cambio objeto matemático central de los cursos de cálculo.

Villa – Ochoa (2012) exhiben que la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente; Frente al mismo tema y en otro sentido, el MEN hace una apuesta al estudio de la variación desde los primeros años de escolaridad, teniendo como propósito, no solo el manejo de variados sistemas matemáticos conceptuales y simbólicos, sino también el desarrollo de un pensamiento variacional y covariacional. Sin embargo, al comparar los planes de estudio de dos instituciones educativas, una de carácter privado y la otra pública, notamos que no se tiene en cuenta la covariación, al menos de manera explícita. El concepto de función, sólo se está enseñando desde una perspectiva de correspondencia o de asignación, y se deja a un lado la perspectiva variacional y de dependencia, es decir, se está dejando por fuera la relación que hay entre los patrones de variación y del comportamiento de los cambios. En dicha comparación de los planes de estudio también se encontró que, ninguna de las instituciones tiene en cuenta las tecnologías digitales (TD) en el proceso de análisis variacional y covariacional, previo al trabajo con funciones o como tratamiento al carácter estático con el que habitualmente se presenta la enseñanza de las funciones. Dejando a un lado el señalamiento de la NTCM

(2000), que considera la tecnología como uno de los seis pilares para tener en cuenta en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, los autores de este trabajo consideran que, el uso adecuado de la tecnología digital permite a los estudiantes realizar el análisis de los casos particulares de las tareas propuestas, dado que facilita la observación y el reconocimiento de los fenómenos existentes, a su vez, permite generar una serie de representaciones gráficas y dinámicas; además de facilitar el cálculo de operaciones y encontrar valores de manera muy rápida y exacta. Sin embargo, se reconoce que se pueden presentar algunos aspectos negativos, por ejemplo, que los estudiantes puedan ver los objetos matemáticos a partir de sus representaciones y características gráficas dejando de lado el aspecto simbólico, lo que los lleva a concebir y a tener una visión parcial de los mismos. Lo anterior trae como consecuencia la aparición de obstáculos epistemológicos que pueden dificultar el progreso apropiado para la construcción del conocimiento matemático, Gómez y Carulla (1998).

Finalmente, identificando que la mayoría de los estudios reportados apuntan a investigar acerca de las acciones mentales que dan cuenta de procesos de razonamiento covariacional para la enseñanza de las funciones o con estudiantes de primeros semestres de universidad que han tomado cursos de cálculo, reconociendo también que varios de los estudios reportados hacen alusión a situaciones de cambio presentadas en lápiz y papel (como el llenado de una botella, el cuadrado en expansión, entre otras) o contextos no simulados por TD y considerando la posibilidad de indagar cómo estos problemas pueden ser abordados a partir del uso de las TD, surge la pregunta de investigación: ¿Cómo razonan covariacionalmente estudiantes de educación básica que no han recibido cursos de cálculo a la hora de resolver situaciones simuladas por TD?. En capítulos posteriores se ampliará el tratamiento que se dio a la pregunta de investigación.

## 1.4 Objetivos

### 1.4.1 Objetivo general

Rastrear las acciones mentales realizadas por estudiantes de grado 9° y 10° que dan cuenta del razonamiento covariacional, que surgen al momento de realizar una tarea simulada con tecnología digital.

### 1.4.2 Objetivos específicos

- Adaptar una serie de tareas que involucren situaciones de covariación simuladas con tecnología digital.
- Identificar las acciones materiales realizadas por estudiantes de grado 9° y 10° facilitadas por la tecnología digital, que favorezcan las acciones mentales asociadas al razonamiento covariacional.
- Describir las acciones mentales que ponen en manifiesto los estudiantes de grado 9° y 10°, al momento de resolver problemas que involucran covariación simulados con tecnología digital.

## **2 CAPÍTULO DOS - MARCO TEÓRICO**

De acuerdo con lo mencionado en el primer capítulo, el objetivo de este trabajo es rastrear las acciones mentales que dan cuenta del razonamiento covariacional, que surge en una situación simulada por tecnología digital al momento de resolver problemas. Para ello, se requiere un instrumento bien estructurado que permita clasificar las acciones mentales de los estudiantes en torno a las situaciones pseudo reales simuladas por TD. Por tanto, se considera pertinente distribuir el marco teórico en dos ejes principales: el razonamiento covariacional y un enfoque teórico en relación con los usos de la TD. En los siguientes apartados se explicita cada uno de estos dos aspectos en profundidad.

### **2.1 Razonamiento covariacional**

El marco teórico usado para rastrear y describir las acciones mentales que dan cuenta del razonamiento covariacional se apoya en el propuesto por Carlson et al. (2003). Quienes proponen un marco conceptual para describir las acciones mentales implicadas en el razonamiento covariacional cuando se interpretan funciones y eventos dinámicos. En dicho trabajo se reporta la habilidad para razonar sobre cantidades covariantes en situaciones dinámicas, de estudiantes que obtuvieron un desempeño alto en el curso de cálculo.

Para tener un mejor entendimiento del razonamiento covariacional, se indaga sobre covariación, razonamiento covariacional, acciones mentales, niveles de razonamiento covariacional y pensamientos pseudo analíticos.

### 2.1.1 Covariación

Después de hacer un seguimiento y búsqueda a la definición de covariación, se encontró que, según Confrey & Smith (1994, 1995) citado por Saldanha & Thompson (1998), una noción de covariación implica moverse entre valores sucesivos de una variable, coordinando esto con el movimiento entre los correspondientes valores sucesivos de otra variable. En este sentido, Coulombe y Berenson (citados en Saldanha & Thompson, 1998) afirman que descubrir el concepto de covariación conlleva cuatro propiedades. La primera, identificación de dos conjuntos de datos: la segunda, coordinación de dos patrones de datos para formar asociaciones entre patrones crecientes, decrecientes y constantes: la tercera, vinculación de dos patrones de datos para establecer conexiones específicas entre los valores de datos y finalmente, la generalización para predecir valores de datos desconocidos. Para Saldanha y Thompson (1998), una noción de covariación es

“la de alguien que tiene en mente una imagen sostenida de dos cantidades (magnitudes) simultáneamente. Implica el acoplamiento de las dos cantidades, de modo que, en la comprensión de una, se forma un objeto multiplicativo de los dos. Como objeto multiplicativo, uno rastrea el valor de la cantidad con la realización inmediata, explícita y persistente de que, en todo momento, la otra cantidad también tiene un valor.” (p. 298)

Grueso y González (2016) establecen que cuando hay una relación de dependencia entre dos magnitudes, la covariación se entiende como el estudio de los cambios de una magnitud atendiendo a los cambios de la otra. Mendoza et al. (2017) definen la covariación como la acción de percibir de manera simultánea dos cantidades variando de manera particular; reconocer la yuxtaposición de dos patrones de crecimiento.

Teniendo en cuenta lo planteado por los autores anteriormente mencionados sobre el concepto de covariación, para este trabajo se entiende como la relación de dependencia que genera los cambios de una magnitud atendiendo a los cambios de la otra.

### 2.1.2 Razonamiento covariacional

Dentro de la búsqueda documental se encontró que algunos autores como Triana et al (2014), Villa-Ochoa (2012), García (2016), Torres (2015), entre otros, coinciden en la definición de razonamiento covariacional elaborada por Carlson et al (2003) como: “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atienden a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (p, 124). Los autores del presente trabajo también acogen dicha definición. Según García (2016), estas actividades cognitivas involucran la coordinación de dos cantidades, lo que hace necesario un seguimiento al valor de cada cantidad para darse cuenta de que la otra también cambia instantáneamente.

Para Carlson et al. (2003), las imágenes de covariación son evolutivas, entendiendo el término evolutivo en el sentido piagetiano, es decir, las imágenes de covariación se pueden definir en niveles que emergen de una sucesión ordenada. Además, coinciden con la descripción de imagen proporcionada por Thomson (1994b, citado en Carlson, 2003) en la que la describe como un constructo “dinámico, que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y como la fuente y el vehículo de operaciones mentales” (p, 231).

De acuerdo con Carlson et al. (2003), el razonamiento covariacional es fundamental para comprender conceptos básicos de cálculo. Por ello, proponen cinco niveles y cinco acciones mentales, que constituye el marco conceptual, para investigar el razonamiento covariacional.

### 2.1.3 Acciones mentales

Carlson et al. (2003) proporciona cinco acciones mentales de razonamiento covariacional, junto con las descripciones y comportamientos específicos asociados a cada acción mental. Estos comportamientos fueron analizados en estudiantes de pregrado, mientras respondían a tareas que comprendían situaciones dinámicas. Las acciones mentales proporcionan un medio para la clasificación de los comportamientos de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de covariación. En la tabla 1 se muestra dichas acciones mentales.

Tabla 1: Acciones mentales - Razonamiento covariacional

<b>Acción mental</b>	<b>Descripción de la acción mental</b>	<b>Comportamiento</b>
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambio en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio de valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio de la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran los

---

		incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	<p>Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad.</p> <p>Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).</p>

---

Tomado de Carson et al (2003, p.128)

---

En esta tabla de acciones mentales se puede evidenciar que la primera (AM1) es la más sencilla y corresponde a la identificación de **qué cambia** en la tarea o problema planteado. Esto implica que el participante manifiesta de alguna manera que visualiza o imagina la correlación entre las dos variables, o el estado de una de las variables con los estados de la otra variable. En este caso, es corto lo que dice la tabla sobre los comportamientos, ya que señala “designación de los ejes con indicaciones verbales de la coordinación de las dos variables”; la designación de los ejes se puede dar de manera rutinaria o algorítmica y no implica la comprensión de las representaciones gráficas. Las indicaciones verbales de la coordinación pueden dar información al respecto. Si se parte de una situación problema, durante el estudio pueden reconocerse diversas manifestaciones del sujeto que verbalizan lo que visualiza sobre la variación y sobre la covariación. Si se parte de un texto en donde se expone la situación problema, cuestionar a los estudiantes o escuchar la discusión entre pares puede proveer datos sobre si identifican en la información del texto las magnitudes involucradas y su carácter constante o variable, además de las posibles relaciones de dependencia que existan entre las variables. Más aún, si el texto se acompaña de dibujos o representaciones pictóricas, estas representaciones posiblemente faciliten



la identificación de las variables y también pueden ayudar a la verbalización de dicho reconocimiento. De otra forma, si la situación problema o el problema se presenta a los estudiantes desde representaciones gráficas formales (e.g., plano cartesiano) estas representaciones pueden, o no, tener sentido para el estudiante en relación con la situación problema de estudio. De cualquier forma, es posible que el estudiante logre verbalizar aspectos que reconocen por el tratamiento algorítmico de la representación gráfica o aspectos que visualizan y que tienen un sentido local en la representación pero que no implican una comprensión global sobre las variables y sus correlaciones. Un ejemplo sobre la acción mental 1 se logra cuando los estudiantes expresan que mientras una variable cambia, la otra también lo hará, dejando explícito el reconocimiento de la relación de dependencia.

La segunda acción mental (AM2), corresponde a la coordinación de la dirección del cambio de una variable con cambios en la otra variable. Este es un nivel más avanzado en el reconocimiento de la correlación entre dos variables, ya que, con respecto a la variación, esta acción mental implica que los estudiantes reconozcan que existe una “dirección de cambio” en las variables. Teniendo en cuenta el tratamiento habitual con números racionales, esta dirección se traduce en ser “más grande o más pequeña” y en ocasiones se verbaliza de esta manera. Más allá de lo propuesto por Carlson et al (2003), respecto a la covariación, la AM2 conlleva reconocer que los cambios en una de las variables afectan en la dirección del cambio en la otra variable. (e.g., si la variable entrada aumenta, entonces, la variable de salida también aumenta o disminuye).

Dentro de las acciones que dan rastros de AM2, se plantea:

- ✓ El estudiante debe reconocer que cambios particulares en una de las variables implican una dirección de cambio en la otra variable (en caso de que el cambio exista).

- ✓ El estudiante reconoce que la dirección del cambio en una de las variables, en puntos o intervalos específicos, depende de la dirección de cambio en la otra variable
- ✓ El estudiante reconoce que la dirección de cambio no es siempre la misma. Esto implica que reconozca la existencia de puntos en donde la dirección de cambio se invierte.
- ✓ Cada valor de la variable; dependiendo del valor en el cual inicia el cambio en la variable independiente, se puede tener un cambio distinto en la variable dependiente.
- ✓ Existen situaciones en la que en cierto intervalo no hay cambios en la variable dependiente, por tanto, no hay dirección de cambio en dicha variable para ese intervalo.

La acción mental 3 (AM3), corresponde a la identificación de la cantidad de cambio de una variable atendiendo a la cantidad de cambio en la otra variable. Esta acción mental conlleva reconocer que las variables asumen valores de conjuntos numéricos específicos, los cuales pueden ser continuos o discretos, dependiendo la situación o problema que se esté estudiando; esta es una característica de la variación, en un nivel más avanzada en relación con las características de la variación necesarias para las AM1 y AM2. Otra característica de la variación necesaria en esta acción mental es la “cuantificación del cambio”, es decir, la posibilidad de establecer la distancia entre dos valores distintos de las variables; lo cual para conjuntos continuos es particularmente interesante porque supone que estas cantidades de cambio no siempre son enteras, más aun, pueden ser naturaleza irracional o incluso infinitamente pequeñas. Respecto a la covariación, la AM3 se manifiesta cuando el estudiante logra verbalizar conclusiones sobre el efecto que tienen los cambios en la variable independiente en la cantidad de cambio de la variable dependiente. Esto es que, al aplicar cambios, caracterizables en dirección y cantidad de manera integrada, en la variable independiente, se caracterizan cantidades de cambio en la variable dependiente (e.g., si el recorte del lado de la caja aumenta 2

cm, entonces, el largo de la caja disminuye 4 cm). Es posible que las cantidades de cambio no se verbalicen siempre acompañados de la dirección del cambio. Aquí se reconocen dos posibilidades: estudiantes que alcanzan la AM3 una vez desarrollada la AM2 y estudiantes que muestran comportamientos sobre la AM3 aún sin haber desarrollado la AM2. Es posible que los estudiantes visualicen aspectos sobre la cantidad de cambio, aun sin haber reflexionado sobre los efectos de los cambios en la dirección del cambio.

La acción mental 4 (AM4), razón de cambio promedio, corresponde a la verbalización y manifestación de la consciencia de la relación de dependencia entre las razones de cambio de valores de salida mientras se consideran los incrementos uniformes del valor de entrada. Se puede evidenciar en la elaboración de bosquejos (mediante la construcción de segmentos de rectas secantes) de lo que se supone será la respuesta, en la que se habla de la razón de cambio promedio atendiendo a los incrementos uniformes en la variable independiente. Por ejemplo, en un problema de llenado de un tanque, encontrar la razón entre la altura del líquido en el tanque y el tiempo empleado en llenarse totalmente, para obtener la velocidad media de llenado. Es importante reconocer que esta acción mental involucra acciones mentales anteriores como AM2 y AM3, se dificulta reconocerla o expresarla cuantitativamente cuando los fenómenos no se comportan linealmente, por ello, la importancia de la descripción, verbalización y explicación sobre el fenómeno analizado.

Finalmente, la acción mental 5 (AM5), corresponde a la verbalización de la consciencia de realizar refinamientos cada vez más pequeños y minuciosos que conlleven a reconocer que las diferencias generan (dependiendo del fenómeno analizado) una razón de cambio instantánea que varía de acuerdo a los valores específicos en cada valor del dominio de la función. Lo anterior facilita reconocer los cambios de dirección y concavidad que los puntos de inflexión generan.

Cabe mencionar que un estudiante que reconoce la razón de cambio instantánea demuestra comprender que la misma resultó de considerar diferencias entre cantidades cada vez más y más pequeñas en una magnitud, construidas sobre el razonamiento exhibido en la AM4. Un ejemplo de AM5 se exhibe cuando los estudiantes expresan por medio de una gráfica (curva suave) que el valor de la diferencia entre dos elementos (pertenecientes al conjunto de salida y cuya diferencia se aproxima a cero), corresponde con un valor específico de cambio en el conjunto de llegada (que aumenta o disminuye según la diferencia). Lo anterior resulta de considerar la naturaleza cambiante, como consecuencia de los cambios continuos de la variable independiente y conlleva a reconocer cambios de dirección (crecimiento y decrecimiento) y comportamiento (concavidad).

#### 2.1.4 Niveles de razonamiento covariacional

De acuerdo con Carlson et al. (2003), un estudiante se puede clasificar en un determinado nivel, según las muestras de las acciones mentales que realiza al momento de desarrollar una tarea. Se dice que una persona alcanza un determinado nivel de razonamiento covariacional, cuando sustenta las acciones mentales asociadas a dicho nivel, al mismo tiempo que sustenta las acciones asociadas a todos los niveles que están por debajo. En la tabla 2 se presentan los cinco niveles de razonamiento covariacional propuestos para este marco conceptual.

Tabla 2: Niveles - razonamiento covariacional

Niveles	Características
<b>Nivel 1 (N1)</b> <b>Coordinación</b>	En el nivel de coordinación, las imágenes de covariación consisten en sustentar la manera en que se asocian coordinadamente los cambios de una variable con cambios en la otra variable (AM1). La imagen de covariación se origina a partir de movimientos corporales y de atención, que pueden dar pie a operaciones mentales.

---

<b>Nivel 2 (N2)</b>	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 que realiza un sujeto, pueden ubicarlo en un nivel de razonamiento covariacional (N2).
<b>Dirección</b>	
<b>Nivel 3 (N3)</b>	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra variable. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes N3.
<b>Coordinación cuantitativa</b>	
<b>Nivel 4 (N4)</b>	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes N4.
<b>Razón promedio</b>	
<b>Nivel 5 (N5)</b>	En el nivel de la razón de cambio instantánea, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o, al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM5 son sustentadas por imágenes de N5.
<b>Razón de cambio instantánea</b>	

---

Tomado de: Carlson et al. (2003, p.129)

Como se evidencia en la tabla 2, el marco conceptual para la covariación tiene 5 niveles de razonamiento que refieren las distintas categorías de desarrollo cognitivo al resolver una tarea, de acuerdo con las etapas respectivas en las acciones mentales.

Carlson et al. (2003), ejemplifica las clasificaciones correspondientes al usar el marco conceptual, mediante los niveles de razonamiento covariacional, los cuales describe como:

El nivel de coordinación (N1) sustenta la acción mental de coordinar la altura con los cambios en el volumen (AM1). [...] (e.g., cuando el volumen cambia, la altura cambia). Estos estudiantes no necesariamente atienden a la dirección, la cantidad o la razón de cambio.

El nivel de dirección (N2) sustenta tanto a AM1 como a la acción mental de coordinar la dirección (aumento) del cambio de la altura mientras se consideran cambios en el volumen (AM2). Se ha identificado AM2 al observar a los estudiantes construir una línea recta creciente o verbalizar que a medida que se aumenta la cantidad de agua, la altura del agua en la botella aumenta.

El nivel de coordinación cuantitativa (N3) sustenta a AM1, AM2 y a la acción mental de coordinar la cantidad de cambio de la altura con la cantidad de cambio del volumen mientras se imaginan cambios en el volumen (AM3). [...] se ha identificado AM3 al observar a los estudiantes localizar puntos en la gráfica o al escucharles comentarios que expresan su consciencia sobre cómo cambia la altura mientras consideran incrementos en la cantidad de agua.

El nivel de razón promedio (N4) sustenta a AM1, AM2, AM3 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio promedio de la altura con respecto al volumen para cantidades iguales del volumen (AM4). Se ha identificado AM4 en estudiantes al observarlos construir segmentos de recta contiguos en la gráfica, para cada uno de los cuales se ajusta la pendiente con el fin de indicar la razón (relativa) para la cantidad especificada de agua; o al escucharles comentarios que expresan su consciencia sobre la razón de cambio de la altura con respecto al volumen mientras consideran cantidades iguales de agua. [...]

El nivel de razón instantánea (N5) sustenta desde AM1 hasta AM4 y a la acción mental de coordinar la razón de cambio instantánea [...] Cabe mencionar que se clasifica a un estudiante en el nivel de razón instantánea sólo si demuestra comprender que la razón instantánea resultó de considerar cantidades de agua más y más pequeñas (construidas sobre el razonamiento exhibido en AM4). (p, 133)

#### 2.1.5 Pensamiento pseudo analítico

Carlson et al. (2003) advierte, que en el momento de clasificar a un estudiante de acuerdo con los niveles de razonamiento covariacional, es posible que se observen algunos comportamientos que den la impresión de estar comprometidos en determinada acción mental. Sin embargo, al poner a prueba dichos comportamientos, estos estudiantes no sustentan los comportamientos asociados a

dicha acción mental. Apoyándose en Vinner (1997), Carlson et al denominó a estos comportamientos como pseudo – analíticos. De acuerdo con Viner (1997) la comprensión subyacente para desempeñar un comportamiento de manera significativa no está presente. Así mismo, Carlson et al, a la acción mental que produjo el comportamiento, la denomina acción mental pseudo – analítica. Para Vinner (1997) dicho comportamiento pseudo – analítico es producido por procesos de pensamiento pseudo -analítico.

Sin embargo, autores como Grueso y González (2016) afirman que es posible mitigar estas acciones mentales y comportamientos pseudo – analíticos. Para ellos, independientemente de cómo se consolide la respuesta de los estudiantes; si los enunciados contienen información de qué y cómo está entendiendo una situación determinada, entonces, “las explicaciones que proporcione evidenciarán de qué está pensando, cómo interpreta y cómo organiza su discurso para convencer sobre su postura” (Grueso y González, 2016, p. 67).

## **2.2 Perspectiva Instrumental**

Un factor que ha permitido el desarrollo de la humanidad es el avance en la construcción de herramientas y tecnologías que permiten realizar tareas humanas. De igual forma, el papel de la tecnología y su relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje no se ha quedado por fuera de la influencia de dichos desarrollos y ha sido tema de interés para la comunidad educativa; además, constituye un requerimiento visible en las políticas públicas del siglo XXI donde se destinan importantes partidas presupuestales para el desarrollo de propuestas de formación en tecnología y software educativos. En este apartado se exhibe la perspectiva instrumental asociada

al uso de herramientas y tecnología, que fue tomada en cuenta para esta investigación, para ello es de suma importancia aclarar varias definiciones al respecto.

### 2.2.1 Herramienta

Rabardel (1995) expresa que una herramienta es un dispositivo que ayuda al humano a realizar una tarea determinada; A su vez, expone que una herramienta sin considerar sus posibles usos o usuarios es un artefacto, pero, este último ha sufrido alguna transformación de origen humano. De este modo se reconoce dicha herramienta por sí sola no constituye nada, pues carece de sentido su uso y es necesaria la interacción humana.

### 2.2.2 Artefacto / Instrumento / Instrumentalización e Instrumentación

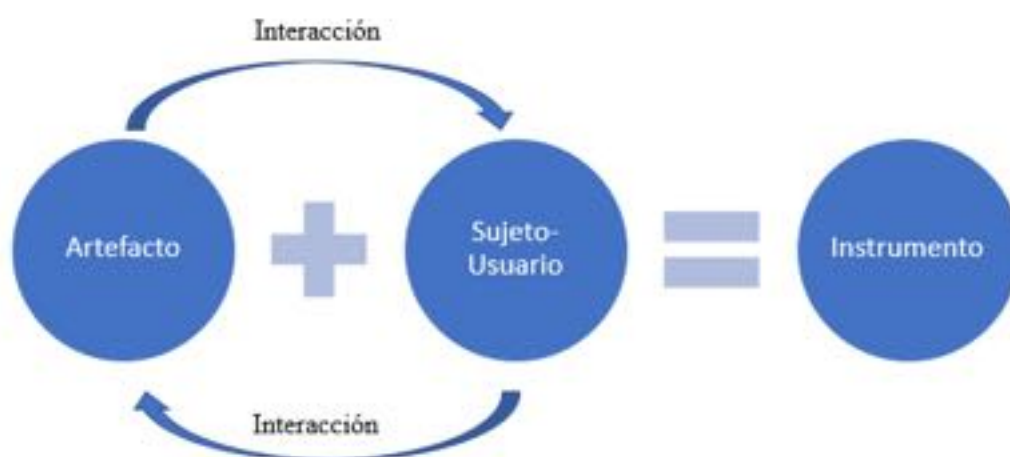
Con respecto a lo que es un artefacto, estamos de acuerdo con Rabardel (1995, p.42) quien plantea que *“Los artefactos no deben analizarse como cosas si no en la forma como median el uso”* y que un artefacto puesto en escena por medio de la acción humana se convertirá en un instrumento. De este modo, el autor llama Génesis instrumental al proceso en el cual un artefacto se convierte en instrumento gracias a la interactividad humana.

Por su lado, Trouche (2005) expresa que un instrumento es la construcción realizada por un sujeto a partir de un artefacto. Así pues, un sujeto puede dotar de sentido a un artefacto para dar solución a una o varias tareas, dándole la característica de “instrumento” que está muy ligada a las construcciones sociales en el que se desarrolla la tarea. Utilizaremos un ejemplo para explicar la perspectiva:

Según el diccionario de la RAE un bolígrafo es un “instrumento para escribir que tiene en su interior un tubo de tinta especial, y, en la punta, una bolita metálica que gira libremente”. Fue



inventado por John Loud a finales del siglo XIX con la intención de escribir y marcar sobre superficies rugosas, papeles y cueros, lugares en los cuales se dificultaba con la pluma. Hoy en día, la mayoría de las personas usamos este artefacto (que se convierte en instrumento al momento de usarlo) para escribir y tomar nota, algunas mujeres lo usan para sujetar su cabello, en alguna ocasión una persona lo usó para revolver el café, otra para devolver los casetts, otra como herramienta de defensa... En fin, a pesar de que la herramienta fue creada con una intención específica, es la interacción con el usuario y el contexto el que le dá el carácter de instrumento.



*Imagen 1: Instrumento*

Rabardel reconoce como proceso instrumentalización a aquel que ocurre cuando el conocimiento del usuario direcciona la forma en que el instrumento es usado, es decir, lo usa para solucionar una tarea siendo consciente del alcance del instrumento, lo modifica y comprueba hipótesis. A su vez, plantea la instrumentación como el



*Imagen 2: instrumentalización - instrumentación*

proceso en el cual la información que arroja el instrumento afecta el conocimiento que tiene el sujeto y también las estrategias para solucionar una tarea. En ambos casos, la interacción entre sujeto y artefacto es la que lo acerca a nociones sobre objetos matemáticos, determinando el alcance en la solución de las tareas.

“La posición intermedia del instrumento lo hace un mediador de las relaciones entre el sujeto y el objeto. Constituye un universo intermedio cuya característica principal es pues doblemente adaptarse al sujeto y al objeto, una adaptación en términos de propiedades materiales y también cognoscitivas y semióticas en función del tipo de actividad en el cual el instrumento se inserta o está destinado a insertarse” (Rabardel, 1995, p.72).

Atendiendo al propósito de observar cómo razonan covariacionalmente estudiantes de bachillerato que no han recibido formación en cálculo, ante situaciones simuladas con TD, se hace necesario rastrear las AM y el tipo de acciones materiales instrumentadas (en adelante AMtI) que los sujetos realizan para dar solución a las tareas propuestas. De este modo, el ejercicio investigativo girará en torno a interpretar dichas AMtI que dan cuenta de acciones mentales y razonamiento covariacional, dando paso a la génesis instrumental.

### 2.2.3 Tecnología Digital - GeoGebra como herramienta instrumentada

La mediación entre la tecnología, el sujeto y el objeto matemático debe estar muy bien pensada, pues según Gamboa (2007) la intención con la que se diseña una actividad muchas veces cambia en el camino de ejecución. Los alumnos tienden a perderse en la ruta de solución de un problema y centrar sus energías en identificar información que no es relevante. Por su lado, Gómez (1997) resalta que el uso de tecnologías debido a su carácter dinámico permite observar los objetos

matemáticos en diferentes sistemas de representación y generar nuevas experiencias matemáticas que difícilmente se pueden lograr con otros medios como el uso del lápiz y el papel.

Según Gómez & Carulla (1998) el uso de la tecnología y los programas computacionales de carácter digital en el aula brinda la posibilidad de interactuar de manera dinámica con los objetos matemáticos y al permitir la movilización entre diversos sistemas de representación potencia una aproximación a la construcción de un conocimiento matemático. Así mismo, la implementación de la tecnología en el aula no garantiza que los procesos sean exitosos y se puede caer en el uso de un solo sistema de representación. En un estudio realizado encontraron que las calculadoras graficadoras inducían a los estudiantes a trabajar únicamente con el sistema de representación gráfico, debilitando la capacidad de los estudiantes para resolver problemas que involucraban la utilización de los sistemas numérico y simbólico.

Teniendo en cuenta lo anterior, surgió la pregunta ¿qué tecnología digital se adecua a los intereses del problema de investigación? Frente a este cuestionamiento debido a la práctica, a la formación profesional de los investigadores y a las características de las instituciones, se identificó el software GeoGebra como una tecnología digital adecuada.

Las bondades de GeoGebra se resaltan dado que es un programa de matemáticas para todo nivel educativo, es un software de código abierto de carácter libre y disponible para usos no comerciales, reúne gráfica y dinámicamente aspectos de geometría, álgebra, estadística y cálculo. También permite el manejo de múltiples representaciones 2D y 3D y vistas de manera simultánea, puede aplicarse en cualquier computador, permite manejar versión online y off-line, manejarse desde dispositivos móviles como celulares y tablets, está disponible en varios idiomas y es intuitiva y amigable a la vista.

### **3 CAPÍTULO TRES: MARCO METODOLÓGICO**

Este capítulo presenta la metodología a utilizar para rastrear cómo razonan covariacionalmente los estudiantes a la hora de resolver una situación simulada con tecnología digital. La intención es atender la problemática identificada por varios autores acerca del bajo nivel de análisis y razonamiento covariacional (RC) que realizan los estudiantes de cálculo, cuando se enfrentan a situaciones en donde la covariación está presente. También se pretende analizar cómo las T.D pueden ayudar al desarrollo del RC. La ampliación del enfoque, la aproximación, la estrategia investigativa y el contexto experimental empleados en este estudio, se describirán en los siguientes apartados. Como se busca rastrear las acciones mentales (AM) que dan cuenta del RC, emergente de una situación simulada por TD al momento de resolver problemas, el enfoque empleado es fenomenológico, pues permite al investigador describir, interpretar, explicar y analizar el objeto de estudio. La aproximación investigativa es interpretativa, puesto que brinda elementos para identificar y rastrear los diversos significados presentes en las acciones, gestos, respuestas, escritos y, en general, en las producciones realizadas por los estudiantes. Estos interactúan para resolver problemas en los cuales la covariación está presente, ofreciendo la posibilidad de caracterizar las acciones y procesos de razonamiento covariacional.

#### **3.1 Estrategia investigativa**

Para la obtención de evidencias tangibles que hacen explícito el RC, se estableció la entrevista basada en tareas. Con esta estrategia, el investigador concentra esfuerzos en observar los procesos de razonamiento, en evidenciar el pensamiento, las interacciones, las conversaciones y diferentes producciones realizadas por un sujeto o un pequeño grupo de sujetos frente a una

misma tarea. Para poner en funcionamiento este tipo de estrategia, se contará con una o varias tareas diseñadas que apunten a los objetivos de investigación. Se pueden usar preguntas orientadas, pruebas escritas y objetos multimedia de grabación para capturar discusiones importantes. El sujeto debe jugar el rol de resolutor de la situación y actuar de manera natural procurando expresar sus pensamientos y estrategias; el investigador, por su lado, podrá interactuar, en ciertos momentos, con los estudiantes por medio de preguntas específicas con el fin de encontrar evidencias de la acción cognitiva.

En estudios cuyo interés se centra en observar procesos cognitivos, el investigador debe llevar registro de diversas formas, obteniendo gran cantidad de información y evidencias que en múltiples ocasiones suelen dejarse de lado. Como el propósito de esta investigación es rastrear las AM que dan cuenta del RC, es necesario que el investigador desempeñe un rol más activo, donde pueda intervenir con preguntas que ayuden a visibilizar la acción cognitiva.

Para llevar a cabo esta investigación se estipularon tres fases. En la primera, se prepara la entrevista, se caracterizan y diseñan las tareas sometiéndolas a análisis y juicios de expertos, se plantean hipótesis de aprendizaje, se eligen las preguntas que pueden ayudar a evidenciar las acciones cognitivas, se describen los participantes y sus roles; y, por último, se eligen los dispositivos de registro. En la segunda, se realiza la implementación de la entrevista en un pilotaje de las tareas seleccionadas y, si es el caso, se ajustan, se depuran las preguntas, se refinan los instrumentos para la recolección de la información, se elige el momento más propicio y el lugar adecuado para la implementación definitiva que en conjunto colaboraran en el proceso de la construcción de datos de análisis. En la tercera, se establece una herramienta inicial de categorización, en la cual se asocian los elementos presentes en el marco teórico que permitirá realizar el proceso inicial de análisis de la información.

### **3.2 Contexto experimental**

Para la realización de esta investigación se contó con dos escenarios investigativos debido a que los autores laboran allí. El primero es un Colegio de carácter privado (en adelante llamada institución A) ubicado en la ciudad de Bogotá. Cuenta con un estimado de 3500 estudiantes de estratos 2 al 5, se encuentra catalogado en nivel muy superior en las pruebas de Estado Icfes. Está dotado con tres salas de sistemas de 40 computadores cada una y se dispone de diversos programas computacionales.

El segundo escenario es una institución de carácter público (en adelante llamada Institución B), ubicada en el departamento de Cundinamarca, que cuenta con un estimado de 320 estudiantes de estratos 1 al 3, de los cuales el 30 % aproximadamente provienen de zonas rurales. Está dotado con 10 computadores funcionales para la sede de secundaria, sin embargo, estos están destinados al uso de la asignatura de sistemas, y por cruces de horario no es posible hacer uso de ellos en otras asignaturas.

### **3.3 Pilotaje**

El pilotaje de las tareas se realizó en la institución A con estudiantes de grado 11°, debido a que en este grado finaliza el ciclo de la educación media vocacional. Es de esperarse que, según los estándares nacionales, en este nivel los estudiantes cuenten con mayores herramientas cognitivas para realizar análisis y desarrollar el razonamiento covariacional. Adicionalmente poseen habilidades discursivas para comunicar sus ideas y razonamientos y las temáticas abordadas en el transcurso del año escolar están asociadas a diversos conceptos del cálculo.

Con respecto al razonamiento covariacional, al revisar el plan de estudios de los grados de 9° a 11°, los estudiantes de grado 11° han tenido a lo largo de su vida escolar experiencia con el manejo de sistemas de representación, análisis funcional y tienen conocimientos en tecnología, pero no es usual en el colegio que se promuevan los procesos de análisis y razonamiento covariacional en las clases de matemáticas.

Los participantes del pilotaje fueron 4 estudiantes de grado 11° caracterizados por sus buenas habilidades comunicativas cuyas edades oscilan entre 16 y 18 años. Es de resaltar que el desempeño en el área de matemáticas no fue relevante para la elección. Se formaron dos equipos de trabajo en parejas; Lo anterior debido a que nuestra postura frente al aprendizaje está asociada al resultado de interacciones sociales entre individuos en contexto.

A partir del pilotaje se refinaron las situaciones simuladas con TD específicamente con GeoGebra, el cual es un software de matemáticas que reúne de manera dinámica geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros de análisis y hojas de cálculo. También permite realizar simulaciones en 3D y facilita múltiples vistas como: la algebraica, CAS, tabular, cartesiana y dar animación. De igual manera, permitió definir el número de tareas a tener en cuenta para esta investigación el cual es 3, y permitió ajustar las preguntas de la entrevista y los cuestionarios para cada situación presentada. Los hallazgos del pilotaje no se reportan en esta investigación.

A continuación, se detallan las fases del estudio llevadas a cabo para la preparación de la entrevista, el diálogo, descripción y recopilación de la información. Así como la descripción de los dispositivos e instrumentos que permitieron recolectar la información y la descripción de la herramienta analítica.

### 3.4 Fases de estudio

#### 3.4.1 Preparación de la entrevista

Entendemos la covariación como la relación de dependencia que genera los cambios de una magnitud atendiendo a los cambios de la otra. Por tanto, las tareas propuestas fueron enfocadas hacia el reconocimiento de las diferentes relaciones que se pueden establecer entre las magnitudes de las situaciones presentadas, en un contexto pseudo real, simuladas con TD en particular con GeoGebra. En ellas se busca indagar sobre ¿qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia?

Es de aclarar que las tareas planteadas no están enfocadas hacia la enseñanza de la covariación, por tanto, las preguntas incluidas en los cuestionarios brindan insumos para que los investigadores ahonden en las respuestas, argumentaciones y acciones materiales instrumentadas realizadas por los estudiantes para dar solución a las tareas. En este sentido, los investigadores procuraron no afectar con preguntas in situ a los procesos realizados por los participantes. Se diseñó un cuestionario para cada una de las tareas y posteriormente se realizó una entrevista con el fin de ahondar en los procesos realizados por los estudiantes. Dentro de las preguntas pensadas para la entrevista estaban ¿Cómo llegaron a esta respuesta? ¿Qué procesos realizaron? ¿Qué hicieron?

#### 3.4.2 Tareas

Para el planteamiento de las tareas se realizó una búsqueda en la literatura, se adaptaron y rediseñaron 5 tareas (problema de la botella y problema de la escalera, Carlson et al. (2003); cuadrado en expansión, Jonhson (2012); razones de cambio, Fiallo y Parada (2018); industria



alimenticia, Parada y Montero (2016)) pensadas para el trabajo sobre el razonamiento covariacional. El rediseño se pensó hacia el reconocimiento de las acciones mentales que hicieran visible el razonamiento covariacional, pero esta vez simuladas con TD, de manera que el desarrollo fuese diferente. A partir del pilotaje de las tareas y el juicio de expertos, se eligieron 3 de las 5 tareas propuestas, debido a que se les encontró mayor potencial.

Por otro lado, cabe mencionar que no tuvimos en cuenta tareas en las cuales la AM5 (razón de cambio instantánea) estuviera presente de manera explícita, pues los estudiantes, en el nivel escolar elegido, no cuentan con los preconceptos suficientes para desarrollar la tarea. A continuación, las tareas definidas para la implementación.

#### *3.4.2.1 Tarea 1: industria alimenticia*

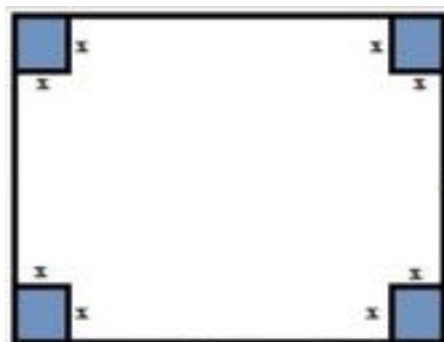
A partir de la situación problema típica que se trabaja en los libros de textos de cálculo “la caja sin tapa” y abordada por Montero y Parada (2016), se adapta a un contexto pseudo real en la que se le pedía al estudiante, dada una lámina, construir una caja sin tapa con el mayor volumen posible. Para ello, los autores les presentaban tablas y gráficas dinámicas en la que se relacionaban el valor del recorte con el alto, el ancho, el largo y el volumen de la caja.

A continuación, se exhibe la primera tarea presentada a los estudiantes:

Ustedes son una pareja de ingenieros encargados de la fabricación de recipientes metálicos usados en la industria alimenticia. Ustedes como ingenieros tienen la tarea de diseñar este recipiente atendiendo a las especificaciones del cliente y garantizando el mejor uso de las materias primas disponibles, esto significa que maximizan los recursos en la pieza.

ESPECIFICACIONES DEL CLIENTE:

El cliente ha pedido que el recipiente debe tener forma rectangular, sin tapa, hecho a partir de una lámina de metal resistente a la oxidación y cuya capacidad de almacenamiento sea la mayor posible.



*Imagen 3: lámina - caja sin tapa*

Para la elaboración de la caja sin tapa se cuenta con láminas rectangulares de acero de medidas  $25\text{cm} \times 35\text{cm}$ , para ello cuentan con una máquina troqueladora que retira piezas cuadradas de las esquinas de la lámina y otra máquina llamada dobladora que recibe la pieza troquelada para doblar las caras y así formar la caja.

En el archivo de GeoGebra se presenta una simulación de la situación, en ella se ven 4 espacios cuadrados en las esquinas de la lámina, esos cuadrados han sido retirados por la troqueladora. A continuación, se presenta una imagen de la simulación propuesta.

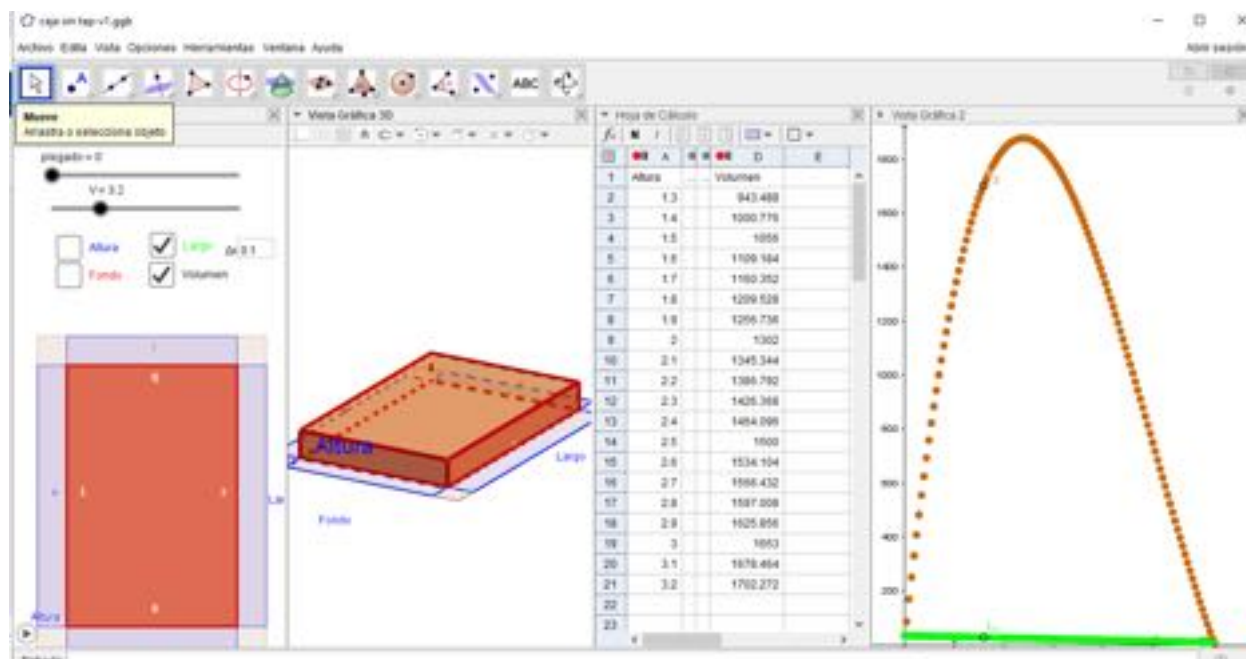


Imagen 4: simulación - caja sin tapa en GeoGebra

Se determina que  $x$  corresponderá a la medida del lado del recorte cuadrado que se quita de las esquinas.

Se determina que  $f$  corresponderá al fondo de la caja.

Se determina que  $h$  corresponderá a la altura de la caja.

Se determina que  $v$  corresponderá al volumen de la caja.

Llamaremos **salto** ( $\Delta$ ) al valor del cambio de estado, por ejemplo,  $\Delta v$  corresponde al salto del valor del volumen.

A partir de la modelación en GeoGebra responda las siguientes preguntas:

Tabla 3: Preguntas – industria alimenticia

No	Pregunta	Respuesta – justificación
1	En la situación presentada, <b>¿Qué es lo que cambia?</b>	
2	¿Cuál es la mayor altura que puede tener la caja?	
3	¿Qué sucede con el largo de la caja a medida que se realizan cortes cada vez de un mayor tamaño?	

4	¿De qué depende el volumen de la caja?	
5	Podrían describir <b>¿cómo cambia el volumen de la caja?</b>	
6	¿Podrían hacer un bosquejo de gráfica que asocie variables cambiantes?	
7	¿Para qué valor del recorte se obtiene el máximo volumen?	
8	¿Existe un intervalo de $x$ en el que el volumen crece o decrece? ¿Cuáles?	
9	¿Existe un intervalo en el que el volumen crece más rápido? Si es así, ¿cuál?	
10	¿Existe un intervalo en el que el volumen crece más lento? Si es así, ¿cuál?	
11	¿La exploración con el software les facilitó realizar la tarea? Explique su respuesta	

### 3.4.2.2 Tarea 2: “El cliente cansón”

Esta tarea está inspirada en el problema del “cuadrado en expansión” propuesto por Johnson (2012) en la que plantea un cuadrado en lápiz y papel y una de las preguntas que hace a los estudiantes es ¿cómo cambia el perímetro de la figura a medida que aumenta el tiempo? A diferencia de la propuesta de Johnson (2012), en este estudio se presenta una adaptación de la situación a un contexto pseudo real donde tienen que tomar decisiones para dar una respuesta a partir de una simulación en GeoGebra.

Un arquitecto diseñó un tanque de forma cúbica para un cliente. El diseño se hizo con un lado de 2 metros de longitud, obteniendo un tanque con capacidad (volumen) de  $8 \text{ m}^3$ .

A continuación, se presenta la tarea 2 “el cliente cansón” propuesta a los estudiantes y una imagen de la simulación de esta.

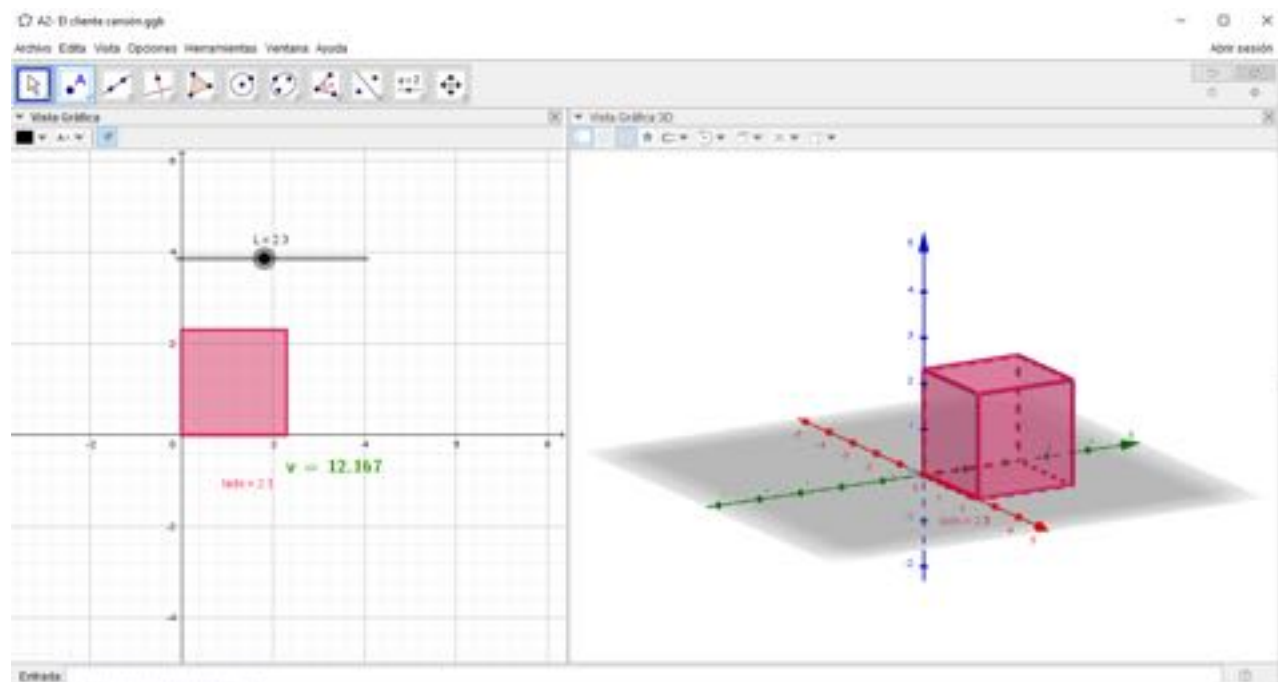


Imagen 5: Simulación - Cubo en expansión

1- El arquitecto entregó el diseño al cliente, pero este le solicitó modificarlo de tal manera que el tanque mantuviera su forma cúbica, pero que su capacidad aumentará 2 metros cúbicos, es decir, que ahora tuviera una capacidad de  $10 \text{ m}^3$ .

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

2- El cliente revisó el diseño del tanque y decidió aumentar otros  $2 \text{ m}^3$  al volumen del tanque.

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

3- El cliente había olvidado unos requerimientos de su familia y solicitó al arquitecto aumentar otros  $2\text{m}^3$  al volumen del tanque.

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

4- El cliente quiere saber en cuánto debe cambiar la medida del lado siempre que se desee aumentar el volumen en  $2\text{m}^3$ . Ayúdale al arquitecto a elaborar un procedimiento o fórmula. Redacta un párrafo y explícale al cliente el(los) procedimiento(s) que debería realizar para tal petición.

Estimado cliente, recibe de mi parte un cordial saludo...

### 3.4.2.3 Tarea 3: “La central de servicios”

Esta Tarea está inspirada en el problema del llenado de la botella propuesto por Carlson Et al. (2003), quienes presentan una situación en la cual se llena una botella de líquido y a partir de la imaginación de los estudiantes, solicitan realizar un bosquejo de gráfica que asociara la altura del recipiente vs el volumen. Es de aclarar que en dicha situación lo único que se presenta es la imagen de la botella.

En la adaptación que realizamos al problema se presentaron dos simulaciones en GeoGebra en la que se muestra el comportamiento de dos tanques: El A constituido por dos cilindros de diferente radio y el B conformado por un cono y un cilindro. A partir de las simulaciones en GeoGebra, se

solicita a los estudiantes que dibujen la gráfica de la altura vs el tiempo de cada tanque dado que ambos se van llenando a una razón constante y van aumentando su volumen. A continuación, se exhibe la tarea 3 presentada a los estudiantes.

Ustedes son los jefes de seguridad industrial de una central de servicios. Uno de sus roles es analizar y pronosticar los cambios que se dan en los tanques de líquidos inflamables, que manejan en dicha entidad y enviar un informe al gerente de la empresa respondiendo ciertas preguntas que desea conocer. Para ayudarles a la comprensión de los fenómenos el gerente les envió una simulación realizada en GeoGebra. Los tanques que deben analizar son el A (compuesto por formas cilíndricas) y el B (compuesto por figuras mixtas). A continuación, la simulación a partir de la cual se solicita realizar el informe de gestión y la ficha técnica de cada tanque.

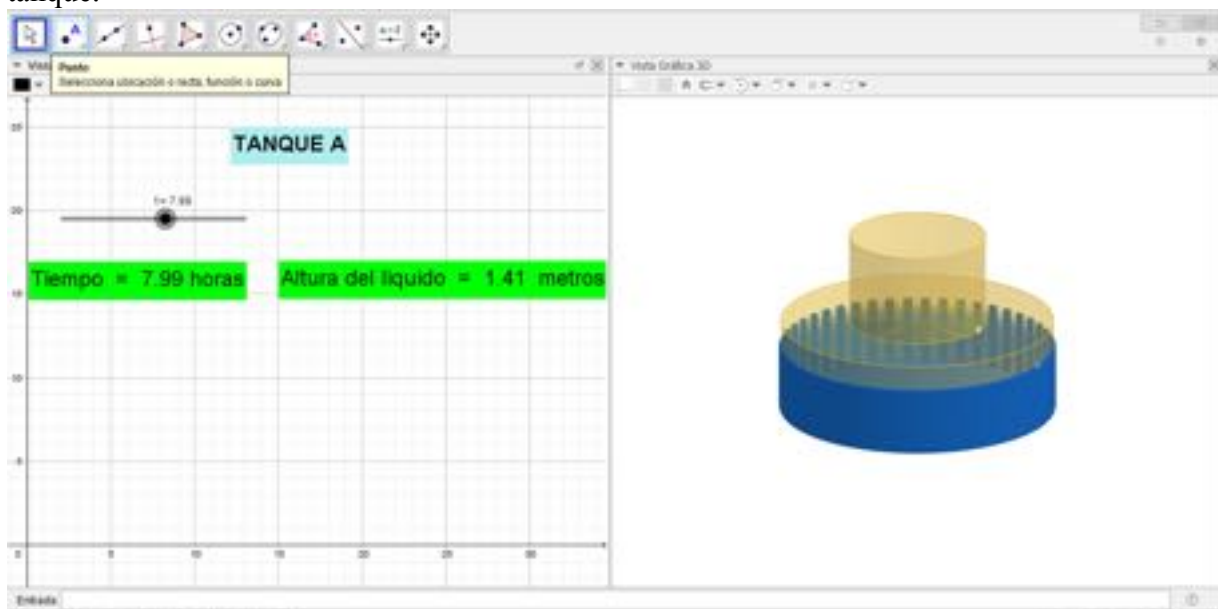


Imagen 6: Simulación - central de servicios Tanque A

Tabla 4: Preguntas - central de servicios Tanque A

Ficha técnica	Radio mayor	Altura	Radio menor	Altura	Razón de llenado
Tanque A:	3m	2m	1.5 m	2m	3m/h
No	Pregunta				

1	En el tanque A, <b>¿Qué es lo que cambia?</b> Justifiquen su respuesta
2	Describan <b>¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?</b>
3	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo
4	Podrían establecer una manera para especificar <b>¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo?</b> <b>¿Qué datos requieres para ello?</b>
5	¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?

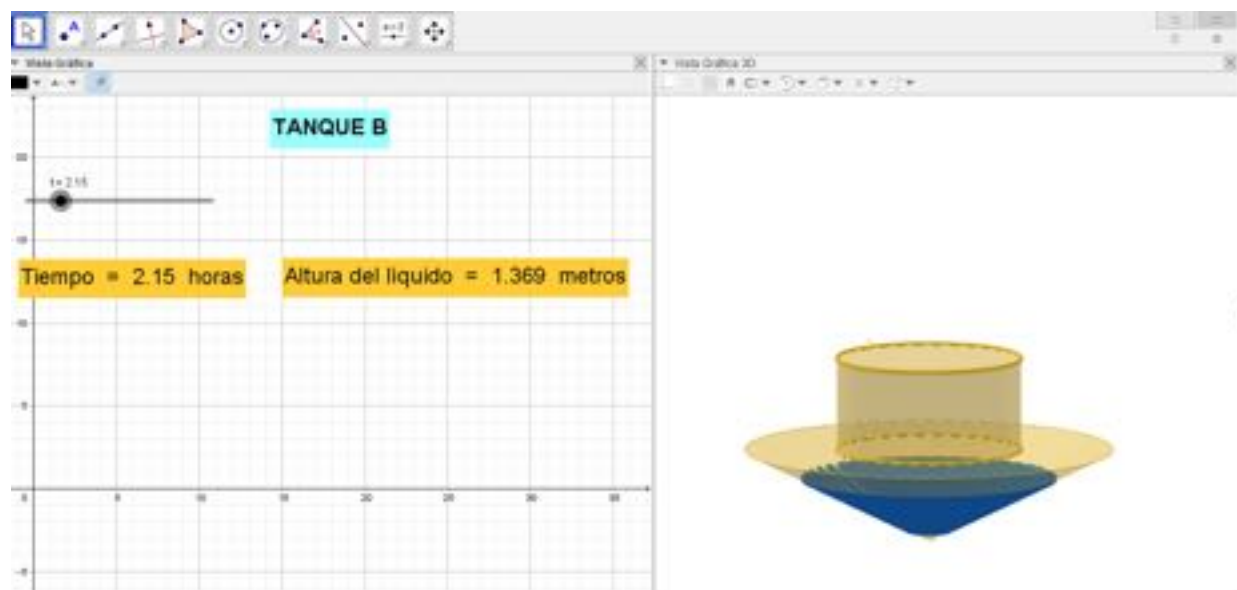


Imagen 7: Simulación - central de servicios Tanque B

Tabla 5: Preguntas - central de servicios Tanque B

Ficha técnica	Radio mayor	Altura	Radio menor	Altura	Razón de llenado
Tanque B:	4m	2m	2m	2m	3m/h
No	Pregunta				
1	En el <b>tanque B</b> , <b>¿Qué es lo que cambia?</b> Justifiquen su respuesta				
2	Describan <b>¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?</b>				
3	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo				
4	Podrían establecer una manera para especificar <b>¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo?</b> <b>¿Qué datos requieres para ello?</b>				



5	¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?
---	--

### 3.4.3 Herramienta de categorización

Se estableció la siguiente herramienta de categorización para identificar las AMtI implementadas por los estudiantes y que están asociadas a las AM que afectan el RC.

Tabla 6: Herramienta de categorización

ACCIONES MENTALES DE RAZONAMIENTO COVARIACIONAL ASOCIADAS A LA TECNOLOGÍA GEOGEBRA			
ACCIÓN MENTAL (AM)	DESCRIPCIÓN	ACCIONES MATERIALES INSTRUMENTADAS CON TECNOLOGÍA - AMtI	DESCRIPCIÓN- HIPÓTESIS
<b>AM1 COORDINACIÓN</b>	Coordinación del valor de una variable con los cambios de la otra	MOVIMIENTO DEL DESLIZADOR- VISUALIZACIÓN - COORDINACIÓN DE DEPENDENCIA	Los estudiantes movilizan el deslizador para visualizar lo que sucede con el tamaño del cuadrado, cubo o tanque.
<b>"AM2 DIRECCIÓN"</b>	Coordinar la dirección del cambio de una variable con los cambios de otra la variable	MOVIMIENTO DE DESLIZADOR VISUALIZACIÓN DE DIRECCIÓN DE LAS VARIABLES	Los estudiantes movilizan el deslizador para visualizar la dirección de los cambios generados.
<b>AM3 CANTIDAD</b>	Coordinar la cantidad de cambio de una variable con la cantidad de cambio de otra la variable	MOVIMIENTO DEL DESLIZADOR VISUALIZACIÓN DE CAMBIOS DE CANTIDAD	Los estudiantes movilizan el deslizador para cuantificar los cambios generados. De igual forma pueden verse abocados a usar otras tecnologías o medio.
		MODIFICAR LOS INCREMENTOS EN EL DESLIZADOR	
		USO DE LA TABLA DINÁMICA CUANTIFICACIÓN EN CAMBIOS DE CANTIDAD	
		USO DE OTRAS TECNOLOGÍAS PARA LA CUANTIFICACIÓN DE LOS CAMBIOS	
<b>AM4 RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO</b>	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los	MOVILIZAR EL DESLIZADOR PARA IDENTIFICAR CAMBIOS UNIFORMES.	Los estudiantes modifican el incremento del deslizador para tener cambios uniformes y hallar la razón de cambio

ACCIONES MENTALES DE RAZONAMIENTO COVARIACIONAL ASOCIADAS A LA TECNOLOGÍA GEOGEBRA			
ACCIÓN MENTAL (AM)	DESCRIPCIÓN	ACCIONES MATERIALES INSTRUMENTADAS CON TECNOLOGÍA - AMti	DESCRIPCIÓN- HIPÓTESIS
	incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada	MODIFICAR EL VALOR DEL INCREMENTO DEL DESLIZADOR USO DE OTRAS TECNOLOGÍAS PARA ENCONTRAR LA RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO USO DE LA TABLA DINÁMICA PARA ENCONTRAR LA RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO	promedio. De igual forma pueden verse abocados a usar otras tecnologías o medio.
<b>AM5 RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA</b>	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	MOVILIZAR EL DESLIZADOR PARA IDENTIFICAR CAMBIOS UNIFORMES. MODIFICAR EL INCREMENTO DEL DESLIZADOR REALIZANDO INCREMENTOS CADA VEZ MÁS REFINADOS USO DE OTRAS TECNOLOGÍAS PARA ENCONTRAR LA RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA USO DE LA TABLA DINÁMICA PARA ENCONTRAR LA RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO	Los estudiantes modifican el incremento del deslizador para tener cambios uniformes cada vez más pequeños y hallar la razón de cambio cada vez más refinada aproximándose a la razón de cambio instantánea. De igual forma pueden verse abocados a usar otras tecnologías o medio.

### 3.5 Recolección de la información

Para la recolección de información se dispuso de varias fuentes como: registro físico de las respuestas en el cuestionario escrito, notas tomadas por los investigadores, grabaciones obtenidas con el programa Camtasia, que es un software libre que permite grabar audio y video de las discusiones presentadas por los participantes, admitiendo capturar lo que sucede en la pantalla

del computador, y la entrevista realizada posteriormente a los estudiantes participantes para esclarecer algunas respuestas dadas en el cuestionario. El uso de las diferentes fuentes de registro facilita tener información detallada de las exploraciones realizadas por los estudiantes en GeoGebra con respecto a la resolución de las tareas. Dichos insumos, constituyen la principal fuente de obtención de evidencias de las AMtI y las AM realizadas por los participantes, poniendo en manifiesto el razonamiento covariacional empleado en la solución de las tareas de carácter dinámico.

### **3.6 Recolección de datos**

Como se mencionó anteriormente la información recolectada proviene de tres fuentes: la escrita con el desarrollo del cuestionario, las grabaciones realizadas a los estudiantes por medio de camtasia y la entrevista final en audio. Las transcripciones de las grabaciones de video y audio más relevantes y de las demás fuentes de información, serán adjuntadas a este trabajo en el apartado de anexos para tener soportes informáticos y archivos digitales.

### **3.7 Análisis de datos**

Para el análisis de los datos obtenidos se tendrá como referente la perspectiva instrumental de Rabardel (1995) en alusión a las AMtI y a su vez, las AM asociadas al razonamiento covariacional planteados por Carlson et al (2003). Para identificar si existen algunos datos que se ajustan o no a los marcos establecidos, abordaremos la tabla de categorización presentada en el apartado 3.4.3. (ver tabla 6) de herramienta de categorización.

### **3.8 Criterios de calidad**

En este apartado se mencionan algunos criterios de calidad del proceso que dan garantía de la calidad de la investigación. Dentro de estos criterios están: auditabilidad, pues se dispone con el registro de las diferentes fuentes de información, cuestionarios escritos, transcripciones, audios de la entrevista y videos de los que se obtuvo la información. Este proceso está abierto al escrutinio público debido a que todas las fases del proceso están documentadas.

Para garantizar que los estudiantes participantes tomaran con mayor seriedad la investigación y no lo tomaran como trabajo de clase, se citó a los estudiantes en horarios extraclase y se le pagó a cada uno \$30000, por el tiempo invertido y dedicado al desarrollo de las tareas el cual fue de dos sesiones la primera de 120 minutos y la segunda de 90 minutos.

Fiabilidad, al llevarse a cabo la investigación en los colegios donde laboran los investigadores, existe una baja probabilidad de errores en el sentido de exactitud, seguridad y estabilidad de los datos que se obtienen, pues se tiene un mejor conocimiento e interpretación de lo que quieren decir o expresar los estudiantes, por ende, una mejor construcción e interpretación de los datos.

Un criterio de producto que pueden tener en cuenta los evaluadores para poder afirmar que el estudio es de calidad, es la adaptabilidad, pues debido a la naturaleza de las temáticas y a la implementación de la tecnología que facilita el dinamismo, se pueden adaptar las tareas a diferentes instituciones y grados escolaridad.

## **4 CAPÍTULO CUATRO: RESPUESTAS, ANÁLISIS Y RESULTADOS**

En este capítulo se presentan las respuestas de los estudiantes y el análisis realizado (organizado en tablas), teniendo como referente el marco de razonamiento covariacional abordado desde una perspectiva instrumental. También se exhiben los principales resultados obtenidos de la investigación a partir de la implementación de las tareas en las dos instituciones.

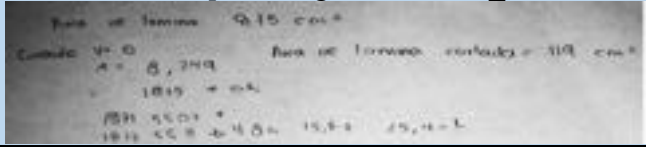
### **4.1 Respuestas y análisis**

Las respuestas brindadas por los estudiantes fueron organizadas en tablas, dado que constituyen fundamentalmente los datos de investigación. Las tablas están organizadas de tal forma que incluyen el número de la tarea, pregunta, respuesta, grado, institución y por último el análisis realizado por los investigadores. De este último, es importante aclarar que se realizó a partir de las evidencias escritas, audios y entrevistas realizadas a los participantes, bajo la lupa de los elementos teóricos sobre el razonamiento covariacional y la perspectiva instrumental.

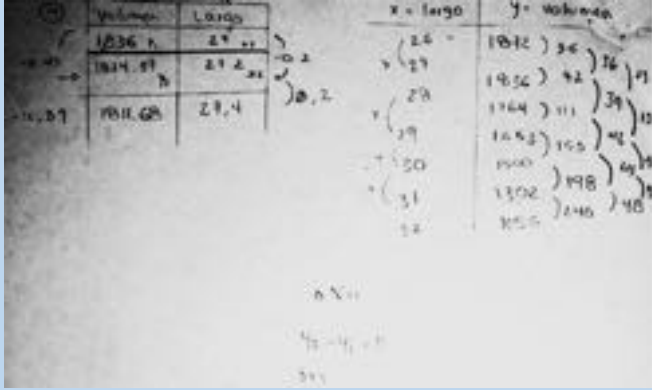
#### **4.1.1 Industria alimenticia**

##### **4.1.1.1 *Grado noveno***

Tabla 7: Respuestas y análisis - Tarea 1 Grado noveno

GRADO NOVENO			
PREGUNTA		G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
1	En la situación presentada, ¿Qué es lo que cambia?	cambia el volumen dependiendo de la medida del lado del recorte que se quita de las esquinas	En la situación planteada a los ingenieros, la caja cambia su volumen dependiendo del tamaño del recorte de las piezas cuadradas de la esquina de la lámina.
2	¿De qué dependen las magnitudes cambiantes?	Del área que se corte con la troqueladora (esquinas)	Las magnitudes cambiantes como la altura y el volumen dependen del tamaño del recorte que se realice en las esquinas de la lámina con la troqueladora.
Análisis preguntas 1 y 2		Las respuestas brindadas por los participantes permiten evidenciar que están reconociendo y relacionando de manera discursiva, que los cambios en el deslizador afectan a los cambios de la altura poniéndose en manifiesto la AM1. Al revisar las grabaciones, encontramos que manipulan la herramienta “deslizador” para explorar lo que sucede con el software, hasta el punto de lograr dar cuenta de lo que cambia cuando se manipula el deslizador. En el dialogo realizado por los estudiantes al momento de realizar la tarea, un estudiante afirma “Tendría una altura alta pero sería muy delgadita”. Con esta afirmación se puede evidenciar que está reconociendo que a medida que aumenta la altura, disminuye el ancho de la caja, es decir, está reconociendo dirección de cambio de una variable con la dirección de cambio de otra variable, dando muestras de una AM2. Estas acciones mentales también se pusieron en manifiesto en la entrevista realizada, con afirmaciones como “si se le quita mucho de las esquinas, la lámina se volverá más pequeña”	
3	¿De qué depende el volumen de la caja? Justifique su respuesta.	De la altura, ancho y largo a partir de las medidas que se cortan con la troqueladora justificación con el cuadro de atrás [ver imagen G1. S1.3. _9 VIVYCAM] 	El volumen depende de la altura y el largo de la caja y estos dependen a su vez del tamaño que se realice con la troqueladora, porque son magnitudes cambiantes dentro de la situación.

GRADO NOVENO		
PREGUNTA	G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
	<i>Imagen 8: Respuestas - tarea 1 - p3-inst_A - G9</i>	
Análisis pregunta 3	<p>Se puede evidenciar que tanto los estudiantes de la institución A como los estudiantes de la institución B, coordinan los cambios de la variable de entrada (recorte de la troqueladora) con los cambios en la variable altura, largo, ancho y volumen, a su vez identifica la relación de dependencia existente entre ellas; en estas acciones se expresa una AM1.</p> <p>Al revisar las grabaciones, de nuevo, los estudiantes manipulan el deslizador para visualizar lo que sucede con la caja. En la entrevista, los estudiantes de la institución A, manifestaron que “<i>el programa nos permitió ver el modelo 3D de cómo quedaba la caja y nos botaba las medidas, nos dimos cuenta de que había una parte que llegaba al volumen máximo y luego volvía a bajar</i>”. Esta parte en adelante es fundamental para nuestro reporte final pues estamos en presencia de una posible acción mental intermedia (emergente) entre AM2 Y AM3. <b>[Llamaremos en adelante AM2* a la acción intermedia entre AM2 Y AM3 que se refiere a la coordinación de los cambios en la dirección de una variable en relación con la coordinación del establecimiento de máximos y mínimos] Aclarando que es intermedia pues no cumple con los requisitos suficientes para ser AM2 ni AM3.</b></p> <p>Por otro lado, los estudiantes de la institución B, en la entrevista, manifestaron que “el volumen de la caja aumentaba y disminuía, eso lo podíamos ver en la aplicación de GeoGebra sin necesidad de hacer cálculos, porque en la tablita nos daba el volumen directamente”. De estas afirmaciones se deducen dos aspectos: El primero, asociado a que coordinan la dirección de cambio del recorte de la lámina con la dirección de cambio de el volumen, evidenciando una AM2. El segundo, se resalta como las diferentes representaciones del programa influyen en los esquemas mentales del estudiante (instrumentación), en este caso, permite coordinar los cambios de la variable independiente con un posible máximo de la situación.</p>	

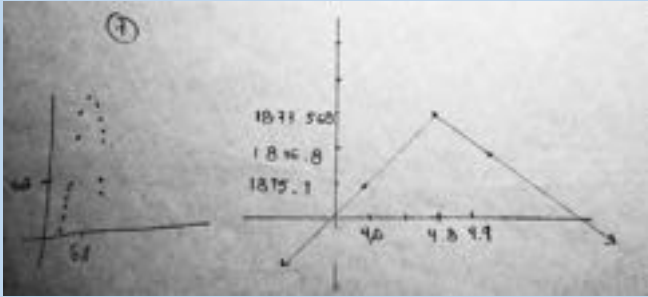
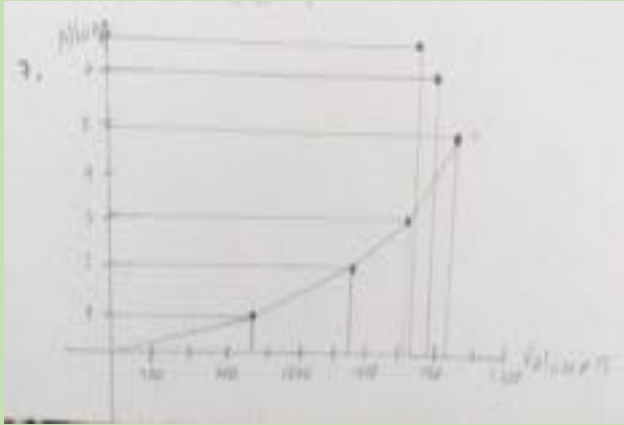
GRADO NOVENO		
PREGUNTA	G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
<p>4 ¿Cómo cambia el volumen y el largo de la caja? Justifique su respuesta.</p>	<p>Justificación con el cuadro de atrás [ver imagen G1. S1.4._9 VIVYCAM]</p>  <p>Imagen 9: Respuestas - tarea 1 - p4-inst_A - G9</p>	<p>Cambian según el tamaño del recorte que se realice en las esquinas de la lámina con la troqueladora, esto es igual al salto que se realice en <math>V</math> (<math>\Delta V</math>).</p>



GRADO NOVENO		
PREGUNTA	G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
Análisis preguntas 4	<p>Los estudiantes de la institución A realizaron acciones materiales y cambios de sistema de representación y uso de tecnología específicos, evidenciados en la creación de una tabla en lápiz y papel a pesar de tenerla en el programa. Al revisar la grabación, se aprecia que usaron la TD como fuente de cálculos rápidos, sin embargo, se veía que en algunos casos usaban también otras tecnologías como la calculadora para verificar que los datos que arrojaba el programa eran consistentes y reales.</p> <p>Durante la entrevista manifestaron que "Nosotros estuvimos experimentando para intentar notar el cambio que se daba en el volumen y pues nos dimos cuenta que el largo cambiaba de uno en uno [cuantifican el cambio en el largo], pero no hallábamos un patrón que se repitiera en el volumen y pues empezamos a restar cifras [cuantifican el cambio en el volumen] y pues encontramos un patrón que se repetía y era que a las diferencias se les sumaba tres a los números".</p> <p>A partir de la imagen 8 y de lo manifestado en la entrevista, se aprecia que los estudiantes coordinan la cantidad de cambio del largo con la cantidad de cambio del volumen, evidenciando una AM3. En este aspecto los estudiantes calcularon diferencias de las diferencias mostrando una acción material y mental asociada a razonamiento covariacional.</p> <p>Los estudiantes de la institución B, durante la entrevista, se les preguntó ¿a qué se refieren con el "salto"? A lo que ellos respondieron <i>"el salto es el cambio de la variable, como por ejemplo (...) si hacemos un recorte primero en 1 cm, pero luego saltamos y hacemos un recorte en 2 cm con la troqueladora"</i>. En la respuesta dada en el cuestionario sumado a la respuesta brindada en la entrevista, se puede evidenciar que los estudiantes coordinan la cantidad de cambio del recorte de la lámina con los cambios en el largo y el volumen de la caja, manifestando así una acción mental intermedia entre AM2 y AM3.</p> <p><b>[A esta acción mental intermedia emergente la llamaremos en adelante AM2** para referirnos a la coordinación de la cantidad de cambio de una variable, asociándola con los cambios de dirección en la segunda variable]. Decimos que es intermedia pues no cumple con las características completas de AM2 y AM3.</b></p>	
5 ¿Existe un intervalo en el que el volumen crece o decrece más rápido? Si es así, ¿cuál?	Cuando la altura es de 6.8 el volumen es de 1658,928 y cuando la altura es de 7.3 el volumen es de 1548.7	Si existe, crece cuando el intervalo en x va de 0.1 - 4.9 y decrece en el intervalo que va de 4.9 a 12.1 ya que existe una relación de dependencia con la medida x

	GRADO NOVENO	
PREGUNTA	G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
Justifique su respuesta		
Análisis pregunta 5	<p>Los estudiantes de la institución A calcularon el área del cuadrado recortado y reconocieron que el máximo aproximado se encontraría cuando la medida del lado fuera de 4,8 cm. Revisando el video y la entrevista, los estudiantes manifestaron que para lograrlo controlaron los cambios en el deslizador a partir del movimiento por medio del teclado alfanumérico (flechas) dado que con el mouse no podían controlar dichos movimientos de avance de manera uniforme. Evidenciando rastros de AM3.</p> <p>Una acción material evidenciada en la pareja fue que observaron en la representación cartesiana que los puntos estaban más separados y eso los llevó a pensar que cambiaban más rápido. En entrevista: "Lo pusimos porque en la gráfica el salto como más grande era ese de 6,8 a 7,3", "usamos el programa para observar en que intervalos decaía más rápido". Con esto, los estudiantes dieron indicios de la AM2 referente a la dirección "la gráfica subía y luego volvía a bajar" ..."si seguíamos aumentando el valor el punto de corte de las esquinas, no subía si no que bajaba" Reconocieron el cambio de dirección en el fenómeno, manifestando que dejaba de crecer y pasaba a decrecer. Acción que ya había aparecido antes y que llamaría poderosamente nuestra atención pues <i>a partir de los cambios en la cantidad de una variable estaban logrando reconocer cambios de dirección - comportamiento en la otra variable. [reconociendo cambios de dirección aludiendo máximos y mínimos. AM2**]</i></p> <p>En la institución B, revisando el video, los estudiantes movilizaron el deslizador manifestando que "esos intervalos dependen de acuerdo al valor del delta x, al salto de x, porque si el salto de x se dá de a uno, va a tener unos intervalos diferentes a si se dan de intervalos de dos". En este fragmento se evidencia una AM3 referida a la cuantificación.</p> <p>Por otro lado, los participantes hicieron un traspaso de tecnología pues a pesar de contar con la tabla dinámica que arrojaba el software, elaboraron una tabla de valores en lápiz y papel en la cual relacionaban el recorte de la lámina con el volumen de la caja. Una vez establecida la tabla, la usaron para reconocer los cambios cuantitativos en cada variable "tenemos que ver cuánto crece del uno al dos, del dos al tres (...) entonces tenemos que ir haciendo restas y mirando cuánto crece en el intervalo". Dando muestras de una AM 3 y un primer indicio de AM4.</p> <p>Revisando el video, se encuentra que los participantes hacen uso de otra tecnología, en este caso la herramienta de la calculadora física para hallar diferencias "Tenemos que quitar lo que creció en el primero y dejar solo la que creció en el segundo" [haciendo alusión a las diferencias entre las medidas del volumen].</p>	

GRADO NOVENO		
PREGUNTA	G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
<p>¿Para qué valor del recorte se obtiene el máximo volumen?</p>	<p>Para <math>X=23,04\text{cm}^2</math> El <math>V=1877,568\text{cm}^3</math> Lado=<math>4,8\text{cm}</math></p>	<p>El mayor volumen se obtiene cuando el valor del recorte llega a <math>4,9\text{ cm}</math>, alcanzando <math>1876,849\text{ cm}^3</math> de volumen</p>
<p>Análisis pregunta 6</p>	<p>Revisando los cuestionarios, la entrevista y los videos, en la institución A se encontraron manifestaciones como: “Lo pusimos porque en la gráfica el salto como más grande era ese de <math>6,8</math> a <math>7,3</math>” haciendo alusión al intervalo en el que se presenta la mayor variación “saltos” entre la medida del recorte y el volumen. Nótese que retoman la respuesta a la pregunta anterior para aludir de manera general que la mayor variación está en el intervalo señalado. Interpretamos que podemos estar en presencia de una AM4 de manera discursiva pues en un poco tiempo, se presenta una mayor variación en el volumen. Existen rastros de análisis local de las funciones y presencia de acciones instrumentadas, dando sentido a la representación gráfica y la información que arroja la simulación.</p> <p>En entrevista "el máximo volumen lo encontramos cuando la esquina cortada era <math>23,04\text{ cm}</math> y si le sacamos la raíz cuadrada nos daba que el lado del cuadrado era de <math>4,8\text{cm}</math> y allí era el máximo" En las respuestas estamos en presencia de AM3.</p> <p>Realizando la revisión de las respuestas de la institución B, se encuentra que hacen uso del deslizador, cambiando valores uniformemente (de uno en uno), para tomar diferentes valores del volumen e ir construyendo la tabla de valores, y, encontrar las diferencias entre los volúmenes obtenidos [AM3].</p> <p>Cuando los estudiantes encontraron las diferencias, reconocen que existen valores negativos, e interpretan que dichos valores y signo son consecuencia de que el volumen empieza a decrecer [nótese que estamos nuevamente en presencia de una acción de coordinar los cambios en una variable para reconocer cambios en el comportamiento y concavidad de la variable].</p> <p>Para tener valores exactos, modifican el salto de <math>x</math> (delta <math>x</math>), asignándole un valor de <math>0.5</math>, posteriormente de <math>0.2</math> y finalmente de <math>0.1</math>, refinando y controlando cada vez más el valor de los cambios [AM3].</p> <p>En la entrevista, a la pregunta ¿Cómo hicieron ustedes para saber que en ese punto se alcanzaba el máximo</p>	

GRADO NOVENO		
PREGUNTA	G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
	<p>volumen? Los estudiantes respondieron que “con la aplicación de GeoGebra, cogimos y buscamos el número y vimos que ahí llegaba a ese punto máximo y que de ahí disminuía y anotamos ese número que fue el mayor” su el compañero continua “porque antes de 4,9 (...) desde que el recorte comenzaba en 0,1 hasta 4,9 iba creciendo, pero luego desde 4,9, al tener más el recorte, iba decreciendo el volumen” En este punto estamos en presencia de AM2 y nuevamente AM2*</p>	
<p>Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se relaciona el volumen con la medida del recorte de la caja.</p>	<p>[ver imagen G1. 1.7_9 VIVYCAM]</p>  <p>Imagen 10: Respuestas - tarea 1 - p7-inst_A - G9</p>	<p>[ver imagen 1.7_LyH-cacique]</p>  <p>Imagen 11: Respuestas - tarea 1 - p7-inst_B - G9</p>

GRADO NOVENO		
PREGUNTA	G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
Análisis pregunta 7	<p>En la institución A, los estudiantes asociaron los conocimientos que habían trabajado en sus clases de matemáticas sobre funciones lineales para intentar explicar el fenómeno. Manifestaron en entrevista: "nosotros intentamos hallar las pendientes, pero no pudimos" dando rastros de AM 4 referida a razón de cambio promedio. Por otro lado, los estudiantes a pesar de tener la gráfica que GeoGebra arrojaba consideraron pertinente comprobar que dicha información era válida. También manifestaron: "sabemos que la gráfica no era una función lineal, pero aún no conocemos que tipo de función era, intentamos utilizar lo que sabíamos para resolverlo" y a partir de esto plantearon el bosquejo de grafica presentado en la imagen 9.</p> <p>En la institución B los estudiantes se vieron en la necesidad de un cambio de tecnología, pues para realizar la gráfica utilizaron valores de la tabla de datos que construyeron en lápiz y papel y posteriormente realizaron la gráfica también en lápiz y papel. En la imagen 10, se puede constatar que realizaron bien la gráfica cambiando la posición habitual de los ejes donde en el eje x se plantea la variable independiente y en el eje y la variable dependiente. Se evidencias rastros de AM4.</p>	
8 ¿La exploración con el software les facilitó realizar la tarea? Explique su respuesta	sí, porque fue más fácil encontrar datos por medio de modelos 3D, tablas y gráficas.	sí porque nos facilitan los cálculos y podemos observar los cambios de la caja cuando el recorte de x es diferente.
Análisis pregunta 8	<p>En entrevista los estudiantes de las dos instituciones manifiestan que su trabajo y producción fue potencializado por el uso de la tecnología. Con afirmaciones como: "Si muchísimo, podíamos comprobar los datos, ver como crecía o decrecía, la tabla de datos", "si no hubiésemos tenido la tecnología tocaba hacer todos los procesos a mano y posiblemente tendríamos que usar ensayo y error", dan cuenta de que su trabajo fue optimizado en cuanto a términos de tiempo y efectividad.</p>	

## 4.1.1.2 Grado décimo

Tabla 8: Respuestas y análisis - Tarea 1 Grado décimo

		GRADO DÉCIMO	
	PREGUNTA	G2- DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
1	En la situación presentada, ¿Qué lo que cambia	Dependiendo de la variación de x, cambia la medida de la altura, largo, fondo y volumen	Cambia la altura (h) y el volumen (v) del recipiente.
	Análisis pregunta 1	<p>Se evidenciaron en los participantes de la institución A las siguientes acciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Movilizaron el deslizador y observaron las representaciones Cartesiana y tabular. Dando forma a los procesos de instrumentación e instrumentalización.</li> <li>• Cuando los estudiantes manifestaron que “el fondo se vuelve más pequeño, la altura se vuelve más grande”, “entre más grandes los cuadraditos el volumen debe disminuir” dieron muestras de AM1 AM2.</li> <li>• Usaron el software y la gráfica cartesiana para comprobar hipótesis. “miremos la gráfica” [pone el cursor en el deslizador y observa la gráfica planteando que era cuadrática] La gráfica que les arrojaba GeoGebra era una parábola y centraron esfuerzos en darle sentido, aludiendo a que la caja en un momento era muy bajita y cuando incrementó la medida del recorte (cuadrado) la caja era muy alta. AM2</li> </ul> <p>En entrevista: Cuando refirieron "depende de que tanto se le quite... todo esto lo veíamos en el programa GeoGebra que cambiando x todo cambiaba" AM1</p> <p>En la institución B, mientras un estudiante leía la situación, su compañero exploraba el software, moviendo el deslizador, para observar que es lo que es lo que cambia.</p> <p>Cuando expresaron "estos espacios son los que quita la troqueladora" [señalando con el cursor la esquina de la lámina en la representación 3D] al parecer le dan más importancia a la gráfica 3D.</p> <p>- Al mover el deslizador, los estudiantes observaron que también cambia la tabla dinámica de la hoja de cálculo.</p>	

		GRADO DÉCIMO	
	PREGUNTA	G2- DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
		<p>Este hecho al parecer les permitió reconocer que en la situación planteada cambia la altura y el volumen (AM1).</p> <p>- "yo creo que eso es como lo mismo, yo creo para hacer que le quepa la mayor cantidad de agua, no sé, como que todo da igual, porque que lo que le dan en altura, se lo quitan en volumen" (9: 20) [AM1, AM2] aparentemente los estudiantes tenían una premisa o hipótesis que consistía en que el volumen de la caja sin importar el tamaño del recorte sería el mismo y lo justifican diciendo lo que le dan en altura se le quita en volumen]</p>	
2	¿De qué dependen las magnitudes cambiantes?	Dependen de la medida de x, ya sea que aumentan o disminuyen.	Depende del corte de la troqueladora, porque esta permite cortar las esquinas de la lámina para que la dobladora las doble
	Análisis pregunta 2	<p>En la Institución A:</p> <p>- Se observa que los estudiantes tienen un pleno conocimiento de las funcionalidades de cada aplicativo y reconocen que grafica es más conveniente [al parecer la herramienta ha sido instrumentada].</p> <p>- Las AM 1 y AM 2 se hacen evidentes en expresiones como "claro el fondo disminuye pues entre más recorte más pequeña se vuelve la basesita de la caja" y "dependiendo de cómo cambia x cambia todo... se puede ver en la gráfica como por ejemplo el volumen sube y baja es como una parábola" se evidencia que la pareja reconoce las relaciones entre variables y asociaciones entre los cambios.</p> <p>En la institución B</p> <p>- Leen de nuevo las indicaciones de la situación, de la lectura reconocen que x corresponde a la medida del lado del recorte que se quita de las esquinas.</p> <p>- Mueven el deslizador para ver qué y cómo cambia. Posteriormente ponen el cursor sobre la casilla de entrada "delta de x" para controlar los cambios de manera uniforme. En manifestaciones como "esto es de los recortes de la troqueladora, ..., porque, si se corta más poquito, va a quedar más grande la caja" [estamos en presencia de una</p>	

		GRADO DÉCIMO	
	PREGUNTA	G2- DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
		coordinación en la cantidad de cambio en una variable, asociada a la coordinación de cambios en la dirección en la otra variable AM2** y con un indicio cualitativo de AM3]	
3	¿De qué depende el volumen de la caja? Justifique su respuesta.	Depende del fondo, el largo y la altura, que es igual a x, ya que todos los valores dependen de la variación de x.	Depende del corte de la troqueladora, porque si las corta un poco las esquinas de la lámina, la caja quedaría con más volumen y menos altura.
	Análisis pregunta 3	<p>Institución A</p> <p>Se evidencia la acción material movilizar el deslizador con el fin de variar (aumentando o disminuyendo gradualmente la medida del deslizador) para observar valores y poder justificar su respuesta. También, los estudiantes muestran un adecuado manejo de la herramienta, pues se movilizan de una versión de las presentadas, a otra en la cual se aprecie una escala adecuada para mirar" de manera más cercana el cambio.</p> <p>Revisando los videos se aprecia que los estudiantes utilizan el registro tabular en dos momentos diferentes para comparar la medida del volumen, dando cuenta de la AM 1, 2 y 3. También usan el termino inversamente proporcional para decir que mientras una magnitud aumenta la otra disminuye AM2. En la expresión "llega un punto en el que el volumen empieza a devolverse" estamos en presencia de una AM2 permeada por la representación gráfica.</p> <p>Se evidenciaron acciones materiales instrumentadas como movilizar el deslizador para explicar el fenómeno. Los estudiantes justificaron la gráfica arrojada por GeoGebra y reconocieron un posible valor máximo para el recorte. De igual forma identificaron y expresaron de manera discursiva que a partir de cierto punto algo ocurre que hace todos los valores "vuelvan a ser lo que fueron antes" dando indicios de AM2*</p>	



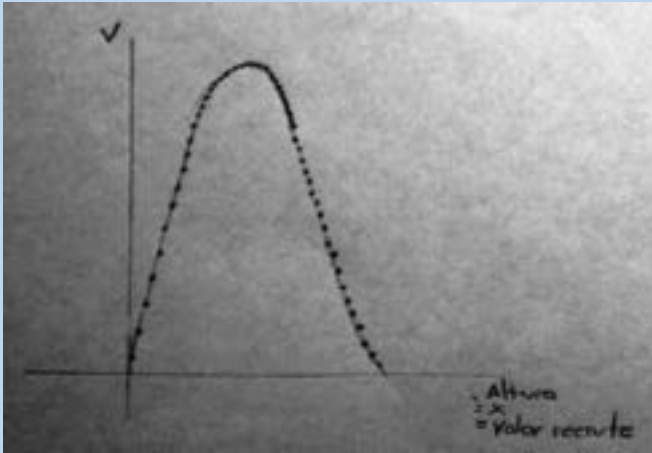
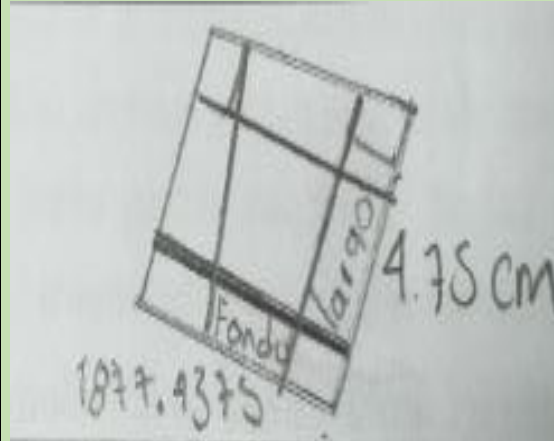
	GRADO DÉCIMO	
PREGUNTA	G2- DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
	<p>Institución B</p> <p>Dentro de las acciones materiales instrumentadas realizadas por los estudiantes, estaba el movimiento del deslizador para observar cómo cambia la forma de la caja en la vista gráfica 3D. Para identificar el valor del volumen en determinado valor del recorte, los estudiantes observaron la representación gráfica 2, en la que se muestra la traza del volumen, observando el valor que alcanza el volumen. Así mismo se encuentra "Lo que no entiendo es para qué sirve esto" [refiriéndose a la tabla dinámica de la hoja de cálculo]</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Se encuentra que la tabla dinámica genera confusión en los estudiantes, porque cuando mueven el deslizador "X" también cambian los valores de la tabla; por tanto, la información arrojada por la herramienta no está siendo reconocida ni instrumentada.</li> <li>En el fragmento "Se me hace que el volumen y todo eso depende de las máquinas, porque, si cambia la altura cambia, el fondo y cambia el volumen... si la máquina corta un poquito las esquinas, pues va a ser más ancha pero menos larga, menos alta, y lo contrario" dando indicios de AM1 y AM2.</li> <li>En la expresión "el volumen de la caja depende del recorte pequeño de las esquinas" ... "porque vea..." [el estudiante mueve el deslizador, para mostrarle a su compañero cómo cambia de forma] "si corta poquito va a ser ancho" dando muestras de AM2** El estudiante está mostrando que una cantidad pequeña de movimiento en el deslizador va a modificar características de la caja como ancho, alto, volumen, entre otras.</li> </ul>	
<p>4 ¿Cómo cambia el volumen y el largo de la caja? Justifique su respuesta.</p>	<p>Volumen: gráficamente es una parábola, ya que, con el aumento de x, aumenta el volumen, hasta cierto punto, donde comienza a disminuir, haciendo que la caja sea más angosta. Largo: es inversamente proporcional a la medida de x, entre más aumenta x, el largo y el fondo disminuyen.</p>	<p>volumen cambia dependiendo de la altura de la caja, porque si disminuyo el largo gano altura.</p>

	GRADO DÉCIMO	
PREGUNTA	G2- DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
<b>Análisis pregunta 4</b>	<p>Institución A</p> <p>En la expresión "Primero aumenta, llega a un punto específico y disminuye" A partir del movimiento del deslizador se hace evidente de AM2, AM 2* y AM2**</p> <p>Los estudiantes movilizaron el cursor y visualizaron la representación tabular y cartesiana [llevando a cabo la acción material de comparar la gráfica] encontrando valores cercanos al punto máximo "según la variación y AM2 de x aumenta hasta cierto punto y luego empieza a disminuir". Hacen uso instrumentado de la simulación identificando cuál de las representaciones le permite captar mejor el fenómeno de cambio, reconociendo que entre más aumenta la medida del recorte "el largo siempre disminuye... es inversamente a x, porque entre más aumenta la altura, más pequeño es el largo" de igual forma, en la expresión "es que eso se ve mejor acá con la simulación" estamos frente a AM 2.</p> <p>En expresiones captadas en video "acá podemos ver que va muy despacio [haciendo alusión a la gráfica]... acá es como si fuera más rápido, acá comienza a ir muy despacio y acá ya se empiezan a separar un poquito... entonces lo que decimos acá es que el volumen crece rápidamente hasta cierto punto, después comienza a hacerse un poquito más lento o disminuir y la caja acá, cuando comienza a bajar es porque comienza a hacerse mucho más angosta por eso el volumen disminuye" Estamos frente a la acción material comparar medidas de tabla con la gráfica y dato del valor de deslizador. Se puede identificar como relacionan y dotan de sentido a la representación gráfica con el modelo 3D de la caja. De igual forma dan sentido al cambio "rápido o lento" teniendo en cuenta la gráfica y los valores presentes en la tabla. Están presentes AM1, AM2, AM2*</p>	
	<p>Institución B</p> <p>En expresiones como "El largo y el volumen cambia con la altura" (49: 03) AM1 está presente. Aplican acciones materiales como movilizar el deslizador para observar que sucede en la representación en 3D. En afirmaciones como "el largo se va a acortar más para poder hacer más altura" y "si se disminuye el largo se aumenta la altura" estamos en presencia de AM2.</p>	

		GRADO DÉCIMO	
	PREGUNTA	G2- DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
5	¿Existe un intervalo en el que el volumen crece o decrece más rápido? Si es así, ¿cuál? Justifi que su respuesta	Si, cuando el valor de $x$ , es decir la altura, está entre 0 y 2, se evidencia que el volumen aumenta más rápido, porque el largo y el fondo en este punto tienen medidas muy grandes.	Si hay (h) 0.246 y (v) 208.04763 va decreciendo por que la caja va aumentando su altura y largo
	<b>Análisis pregunta 5</b>	<p>Institución A</p> <p>Los participantes reconocieron a delta (<math>x</math>) como la medida en que se quiere aumentar. Estamos en presencia de AM3, pues elegían el tamaño del incremento para observar fenómenos y comprobar hipótesis. En video los estudiantes controlan, comparan y coordinan los cambios en el volumen con respecto a los cambios en la medida del recorte, lo hacen visualizando la gráfica y cuantificando “va aumentando como de a 80, y luego va disminuyendo”.</p> <p>De igual forma en la manifestación "acá aumenta de a menos" y “crece más rápido cuando <math>x</math> está entre 0 y 1,5” se está visualizando en la gráfica cartesiana que se presentan ciertos intervalos donde existe mayor variación entre recorte y volumen. En la expresión "aquí crece más rápido, la altura es más poquita” los estudiantes están comparando valores, gráficas cartesiana y modelo 3D de manera simultánea. Al igual son evidencias de AM3.</p> <p>En la frase "dependiendo de que tanto se le quite de <math>x</math>, que tanto crece el volumen o que tanto decrece" interpretamos que están razonando covariacionalmente, realizando diversas acciones materiales asociadas al movimiento del deslizador, observación y comparación entre valores de la tabla, además de comparar simultáneamente diferentes representaciones.</p>	

	GRADO DÉCIMO	
PREGUNTA	G2- DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
	<p>En entrevista:</p> <p>ANDRES: “Como se ve en la gráfica de GeoGebra, al principio como x tiene una medida pequeña, el largo y el fondo son muy grandes, lo que hace que el volumen empiece a aumentar un poco más, empiece a aumentar más rápido y pues eso lo vimos en la gráfica” [se identifica una comparación gráfica en diferentes momentos AM1, AM2]</p> <p>PROFESOR: ¿Lograron identificarlo con valores?</p> <p>ANDRES: “Sí. Hicimos la gráfica y justo en ese punto [4.8] el máximo valor era 1877 ... fue el máximo valor y luego empieza a decrecer” [AM2*]</p> <p>VERÓNICA: “tomamos como referencia todos estos datos (en GeoGebra) y nos dimos cuenta... [acción material de comparar imágenes y valores] tomábamos de a 5 datos y comparábamos en donde aumentaba más rápido” [calculando las diferencias entre las medidas de los recortes y las diferencias entre las medidas del volumen. Esto lo hicieron en una tabla generada en I]</p> <p>Institución B</p> <p>Se identificó que los estudiantes primero movían el deslizador de manera natural sin procurar controlar los cambios, lo hacían para hacerse una idea global del fenómeno, posteriormente buscaron la opción de animar el deslizador procurando que el fenómeno se pudiera observar de manera uniforme. Una vez tenían una idea general, observaban la traza del volumen, la gráfica que se iba formando y el movimiento del punto que representa el volumen sobre dicha gráfica.</p> <p>En expresiones como "huy mire, aquí va rápido" ó "Aquí va como lento" [señalando un intervalo de valores del recorte y vecindades cercanas al valor máximo de la gráfica] se evidencian AM2 y AM 2* facilitada por la animación de la simulación.</p> <p>En la manifestación "Por eso aquí no ha marcado [señala con el dedo la pantalla, luego, con el cursor, la parte de la gráfica, en la que tiene algunos espacios en blanco y tiene mayor inclinación], porque acá va más rápido, mire, acá va más rápido, entonces, por eso no se ha marcado esos espacios que están en blanco, porque va más rápido".</p>	

	GRADO DÉCIMO	
PREGUNTA	G2- DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
	<p>Interpretamos que los estudiantes están reconociendo que, en un mismo aumento en la medida del recorte, el volumen se afectará en mayor o menor medida, asociando los espacios en blanco como momentos en los cuales se presenta mayor variación y que en los espacios marcados o más cercanos, se presenta menor cantidad de cambio. Con lo anterior se manifiesta una AM 3 e importante noción de acumulación fundamental para entender conceptos del cálculo.</p> <p>Para dar respuesta a la pregunta, los estudiantes, movilizaron el deslizador hasta que el punto sobre la gráfica se ubicara en la cresta, donde está los espacios en blanco dejados por la traza. Luego, tomaron el valor de la altura y el volumen de la tabla.</p>	
6 ¿Para qué valor del recorte se obtiene el máximo volumen?	Para cuando x vale 4,8, porque el volumen máximo que alcanza la caja es de 1877,568 en este punto	El mayor volumen se obtiene cuando la h está en 4,75
Análisis pregunta 6	<p>Institución A</p> <p>Se identificó que los estudiantes eligieron un intervalo cercano al valor en el cual estaba el posible valor máximo para el recorte, para realizar un análisis local (modificando valores del incremento y/o controlando los valores del cambio para identificar el volumen máximo. Esta tarea fue realizada de manera simultánea, comparando las diversas representaciones que GeoGebra facilitaba.</p> <p>En la manifestación "creo que podemos ser más específicos" y seguidamente aplica cambios en el valor de delta (x) dando indicios de AM3 y AM5 [pues estaba buscando el valor exacto en el cual se hallaba el máximo, usando cada vez más decimales de aproximación, que le permitieran mejores refinamientos a partir del valor del deslizador], después nuevamente movilizaba los valores del deslizador [con el cursor para controlar cambios uniformes] y</p>	

GRADO DÉCIMO		
PREGUNTA	G2- DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
	<p>poder observar la tabla y la posición del punto.</p> <p>En la Institución B, los estudiantes animaron el deslizador y lo detuvieron cuando el punto sobre la gráfica estaba en un valor muy cercano a la cresta. A partir de esta acción material, observaron el valor de la altura, en dicha posición y en la tabla dinámica, usando representaciones simultáneas. Se presentan indicios de AM1.</p> <p>En cuanto al uso de la herramienta animación, es importante comentar que, aunque permite observar de manera global y más o menos homogénea el fenómeno de cambio dado a que maneja una velocidad uniforme de animación, podría generar obstáculos a la hora de establecer la coordinación entre los cambios en una variable con respecto a los cambios en la otra.</p>	
7 Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se relaciona el volumen con la medida del recorte de la caja.	<p>Abajo. [ver imagen G2. 1.7_10 VyA]</p>  <p>Imagen 12: Respuestas - tarea 1 - p7-inst_A - G10</p>	<p>[ver imagen 1.7_10 JyH]</p>  <p>Imagen 13: Respuestas - tarea 1 - p7-inst_B - G10</p>

		GRADO DÉCIMO	
	PREGUNTA	G2- DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
	<b>Análisis pregunta 7</b>	<p>Los estudiantes de la institución A, reconocieron rápidamente cual era la gráfica que se ajustaba a lo solicitado. Como en la simulación en GeoGebra se presentaban dos gráficas, seleccionaron la que asociaba las variables indicadas y básicamente lo que hicieron fue replicar la información que arrojaba el programa. Usaron el deslizador para encontrar algunos valores específicos y así construir su grafica en lápiz y papel. Al realizar de manera adecuada la gráfica, se evidencian AM1, AM2, AM3 Y AM4. Sin embargo, es de resaltar que esta respuesta podría estar permeada por la simulación.</p> <p>En la institución B, los estudiantes no entendieron lo que se solicitaba y manifestaron en expresiones como "no sé qué hacer" ó "podemos hacer este dibujo [refiriéndose a la representación plana de la situación, en la que se apreciaba la lámina y los cortes realizados] y le podemos poner estas medidas que son las del recorte de la caja, ... digamos el volumen". Con lo anterior, se pudo evidenciar que para los estudiantes realizar un bosquejo de la gráfica está cualquier representación pictórica</p>	
8	¿La exploración con el software les facilitó realizar la tarea? Explique su respuesta	Si, bastante porque nos facilitó ver como variaban las medidas de la caja y como se presentaban las gráficas para cada uno de ellos.	Si porque se puede cortar y doblar sin dañar nada y en menos tiempo y se puede ver cómo va quedando el modelo de la caja.
	<b>Análisis pregunta 8</b>	<p>En la institución A, la respuesta fue un sí rotundo. Manifestaron que "nos permitió ver como variaban y que si no hubiera sido por esto estaríamos reperdidos" evidenciando y reconociendo gran potencial en la simulación que permitía tener varios valores de manera simultánea, plantear hipótesis y devolverse para comprobar. Posteriormente, en entrevista manifestaron:</p> <p>ANDRÉS: "en si el programa de verdad nos ayudó mucho porque era como si tuviéramos todas las posibilidades con solo mover una línea, en cambio sí lo hubiéramos tenido en físico no, no hubiera sido lo mismo y no hubiéramos visto como era el comportamiento de la gráfica..."</p> <p>PROFESOR: ¿ustedes presentían que el comportamiento iba a ser así como el ustedes manifestaban, en forma de parábola?</p> <p>VERÓNICA: Yo no me lo esperaba</p>	

GRADO DÉCIMO		
PREGUNTA	G2- DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
	<p>ANDRÉS: yo más o menos, pero no tan exagerada... si pensé que fuera a disminuir un poco, pero no que llegara otra vez al mismo punto.</p> <p>En la institución B la respuesta también fue positiva, ellos manifestaron que sin tener que dañar nada podían reconocer como va quedando la caja, además cuando decían que “se puede cortar y doblar” hacían alusión al proceso de devolución que realizando la tarea con lápiz y papel ó realizando la caja con materiales tangibles, una vez cortada ya no podían devolverse.</p>	

#### 4.1.2 El cliente cansón

##### 4.1.2.1 Grado noveno

Tabla 9: Respuestas y análisis - Tarea 2 Grado noveno

		GRADO NOVENO	
PREGUNTA		G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
1. EL arquitecto entregó el diseño al cliente, pero este le solicitó modificarlo de tal manera que el tanque mantuviera su	a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?	Al ser un cubo todos sus lados deben tener medidas iguales y para obtener las medidas se debe sacar la raíz cúbica de la capacidad que pide el cliente.	El arquitecto debe aumentar las medidas de los lados para, así mismo, obtener mayor capacidad.



GRADO NOVENO		
PREGUNTA	G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
<p>forma cúbica, pero que su capacidad aumentará 2</p>	<p>Institución A, durante la entrevista los estudiantes manifestaron “Lo que hicimos fue sacarle la raíz cúbica y hallábamos el lado”. Los estudiantes encontraron a partir del software que los cambios no eran exactos. Se evidencia una AM2** cuando los estudiantes modificaron el delta x para tener mayor grado de aproximación y observar qué sucedía con el volumen.</p> <p>Revisando la grabación se puede apreciar que, verificaban datos arrojados por el software haciendo uso de la calculadora y lápiz y papel. Para ello, Hicieron cálculos, en la calculadora, para conocer el valor de la raíz cúbica de 8 y lo registraban en una pseudotabla.</p> <p>Los estudiantes ubicaron valores cercanos a la raíz cúbica del valor solicitado (lo hacían con el cursor) pero para mayor precisión a partir de ese valor movilizaban el deslizador con el cursor. Luego, modificaron la cantidad de decimales usando 8 decimales y buscaban el valor que les diera 10 aproximando con la medida del cursor. (ya no mouse). Cuando los estudiantes modifican la cantidad de decimales del deslizador y lo movilizan con el cursor, están controlando y cuantificando los cambios en el lado, para ver cómo está cambiando el volumen, evidenciando una AM2**</p> <p>Los estudiantes de la institución B, en las respuestas dada al cuestionario, evidencian la AM1 y AM2 pues están coordinando la dirección de cambio de las magnitudes. En la grabación se aprecia que lo primero que hacen es intentar modificar el incremento del deslizador, para observan los cambios del volumen manifestando una AM2**</p>	
	<p>b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta</p>	<p>A cada lado debemos aumentarle <math>0,15443469\text{m}^3</math> lo que da una medida de <math>2,15443469\text{m}</math></p>
		<p>La medida de los lados del tanque debe ser aproximadamente entre 2.154 y 2.155 para tener un volumen exacto de <math>10\text{ cm}^3</math>. Este es el dato más preciso que nos brinda GeoGebra.</p>

		GRADO NOVENO	
PREGUNTA		G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
	<p>En la grabación de la institución A un estudiante manifiesta que “siempre al modelo anterior debe aumentarle la diferencia” AM2**. A las preguntas ¿qué medidas debe tener? Y ¿Cuánto debe ajustar? Viviana responde "debe ajustar la diferencia". Pusieron el valor de la raíz cúbica hallado en la calculadora en el valor del deslizador, modificaron de acuerdo a la respuesta de la calculadora el valor exacto en el deslizador.</p> <p>Se evidencia en este caso, que el uso del lápiz y papel y la calculadora fue la fuente de solución, mientras que el software fue utilizado para comprobar hipótesis.</p> <p>Los estudiantes de la institución B movilizaron el deslizador en busca que el volumen fuese <math>10 \text{ m}^3</math>, pero se dan cuenta que con los valores que toma el deslizador, no es posible encontrar el valor exacto. Un estudiante dice “Quiero modificar el salto que da, porque salta cada centésima”. [Es esta afirmación se evidencia una AM2**] el profesor le da las indicaciones para modificar el incremento y el estudiante lo modifica para que incremente por el orden de las milésimas. De nuevo movilizan el deslizador buscando valores cercanos al volumen deseado (<math>10 \text{ m}^3</math>).</p> <p>Los estudiantes siguen modificando los incrementos en el deslizador, de tal manera que los incrementos eran cada vez más pequeños. Lo hicieron hasta que encontraron el limitante en el software de no reconocer un incremento más pequeño a 0.00000000001. Cabe aclarar que los estudiantes realizaron estos cambios en el deslizador porque tenían la hipótesis que era posible encontrar un número exacto para el cual su cubo fuese 10. Sin embargo, cuando se dan cuenta que no es posible un estudiante manifiesta "yo creo que este ejercicio era el más fácil, pero a pesar de que teníamos la herramienta [refiriéndose al software], no podíamos dar una respuesta exacta". Con esto se pone en evidencia que no siempre la tecnología puede dar solución a los problemas planteados. Dado que no encuentran una medida del lado exacta, toman el intervalo entre los dos valores más cercanos entre los cuales se encuentra el volumen que le pide la situación, porque consideran que en dicho intervalo se encuentra la solución exacta, así ellos no la hayan encontrado.</p>		
2- El cliente revisó el diseño del tanque y decidió aumentar otros $2 \text{ m}^3$ al volumen del tanque.	a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?	Al ser un cubo todos sus lados deben ser iguales y para obtener estas medidas se debe sacar la raíz cúbica de la capacidad que pide el cliente.	El arquitecto debe aumentar las medidas de los lados del cubo, para así mismo, obtener mayor capacidad en el tanque.

		GRADO NOVENO	
PREGUNTA		G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
	<p>Los estudiantes de la institución A repitieron el proceso anterior. (aumentar la cantidad de decimales en el programa e ingresar el valor de la respuesta encontrada en la calculadora, mostrando un buen grado de aproximación decimal). Reconocieron el valor de las diferencias como el factor que puede pronosticar cambios de una variable con los cambios en la otra variable AM1 y AM3</p> <p>Los estudiantes de la institución B, con base en la exploración anterior, responden la pregunta, reconociendo si se aumenta el lado del cubo, también aumenta su volumen. Evidenciando una AM2. Los estudiantes ponen en manifiesto una AM3 cuando reconocen que deben aumentar dos centímetros en su volumen y no necesariamente en sus lados "esos 2 cm tienen que aumentar en su volumen, más no en sus lados. En sus lados pueden aumentar medio milímetro y si da los 10 m<sup>3</sup>"</p>		
	<p>b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta</p>	<p>La medida de cada uno de los lados es de 2,289428485m al ajustarle 0,1349937951m a cada lado.</p>	<p>Si queremos que el volumen sea de 12 cm<sup>3</sup>, la medida de sus lados deber ser aproximadamente de 2.289 y 2.29. No brindamos una solución exacta. Porque a pesar de que la herramienta nos brinda datos exactos sin calcular, no nos permite hacer un salto más pequeño entre sus dimensiones.</p>

		GRADO NOVENO	
PREGUNTA		G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
	<p>En la institución A se evidenciaron las AM1, AM2** AM3 en acciones materiales como</p> <p>Movimiento del deslizador con el mouse</p> <p>Movimiento del deslizador con el cursor</p> <p>Modificación de la cantidad de cambio en el deslizador</p> <p>Cálculos mediante calculadora</p> <p>Registro en lápiz y papel</p> <p>Registro en lápiz y papel (pseudotabla) y resta de valores por medio de calculadora reconociendo el cambio entre dos valores del dominio e identificándolo en el codominio de la función abordada</p> <p>En la institución B, al igual que en el punto anterior, los estudiantes mueven el deslizador buscando valores cercanos al volumen deseado (<math>12 \text{ m}^3</math>), tomando los dos valores más cercanos entre los cuales se encuentra el volumen que le pide la situación. Evidenciando las AM1, AM2, AM2** y AM3</p>		
3- El cliente había olvidado unos requerimientos de su familia y solicitó al arquitecto aumentar otros $2 \text{ m}^3$ al volumen del tanque.	a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?	En el diseño a cada lado se le aumenta $0,1207137791$ para que cada lado mida $2,410142264 \text{ m}$ y tener la capacidad necesaria.	El arquitecto debe aumentar las medidas de los lados del cubo, para a su vez aumentar el volumen del cubo según las peticiones del cliente.
	En la institución A y en la institución B, los estudiantes realizaron el mismo procedimiento que en la primera parte. Por lo que se deduce que estas presentes las mismas acciones mentales mencionadas anteriormente.		

		GRADO NOVENO	
PREGUNTA		G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
	<p>b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta</p>	<p>Cada lado mide 2,410142264 al aumentarle 0,1207137791 a los lados del diseño anterior</p>	<p><math>2.410142265 = \sqrt{14.000000014}</math> no hallamos una respuesta exacta ya que a pesar que tenemos una herramienta que nos brinda datos muy exactos y precisos, sus cifras no pueden tener más de 7 cifras y la solución más exacta que nos brinda el programa es la de arriba.</p>
	<p>Los estudiantes de la institución A manifestaron que “nosotros modificamos la cantidad de decimales para que se aproximara mucho” con esta afirmación de nuevo se pone en manifiesto las AM1, AM2, AM3          Los estudiantes de la institución B realizan el mismo procedimiento descrito en el punto 1b, en el que modifican los incrementos del deslizador, haciéndolos cada vez más pequeños. Por lo anterior se infiere que están presentes las mismas acciones mentales.</p>		

		GRADO NOVENO	
PREGUNTA		G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
4- El cliente quiere saber en cuánto debe cambiar la medida del lado siempre que se desee aumentar el volumen en 2m. Ayúdale al arquitecto a elaborar un procedimiento o fórmula. Redacta un párrafo y explícale al cliente el(los) procedimientos que debería realizar para tal petición.	Estimado cliente, recibe de mi parte un cordial saludo...	<p>A continuación, encontrará la fórmula para aumentarle a un diseño cualquiera <math>2m^3</math> de capacidad conservando su forma cúbica:</p> <p><math>x</math>=capacidad deseada  <math>y</math>= medida del lado  <math>z</math>= medida del lado del diseño anterior  <math>f</math>= ajuste que debe realizarse al diseño anterior  <math>[3\sqrt{x}=y] \quad y-z=f</math></p>	<p>Si quiere seguir aumentando el volumen del tanque <math>2 m^3</math>, debe utilizar la herramienta que nos brindó a nosotros, aunque en algunas ocasiones la respuesta puede ser un poco dispendiosa; ya que hay números decimales de las medidas de sus lados para poder hallar un volumen exacto al hallar <math>2 m^2</math>. En cambio, hay otros volúmenes más sencillos de hallar así su incremento sea de uno, por ejemplo, el volumen 1, el volumen 8, que fue el inicial que nos brindaron, el volumen 27 y 64.</p>

GRADO NOVENO		
PREGUNTA	G1- NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3- NOVENO (INSTITUCIÓN B)
	<p>En la Institución A, discuten acerca de la fórmula adecuada, planteando una formula recurrente (donde se requiere de un resultado anterior para conocer el siguiente), discuten acerca de si es viable o no su proceder e intentaban poner números finitos y llegan al consenso de la fórmula. Cabe resaltar que los estudiantes no usan software para el planteamiento de la fórmula, solo actividad mental.</p> <p>Los estudiantes de la institución B discuten sobre si es posible encontrar una fórmula, para salir de dudas vuelven a mover el deslizador, de tal manera que reconstruyen la situación desde que el volumen es de <math>8 \text{ m}^3</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Cambian de nuevo el incremento del deslizador a las centésimas.</li> <li>- Cambian el incremento del deslizador, esta vez, lo hacen con incrementos de una unidad. " pongámosle intervalo de a uno" [ cuando dicen intervalo se están refiriendo al incremento del deslizador], cuando movilizan el deslizador encuentran que, si el lado incrementa una unidad, entonces, el volumen obtiene valores exactos. Con estas acciones se pone en manifiesto las AM1, AM2, AM3</li> </ul>	

#### 4.1.2.2 Grado décimo

Tabla 10: Respuestas y análisis - Tarea 2 Grado décimo

GRADO DÉCIMO		
PREGUNTA	G2-DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)

		GRADO DÉCIMO	
PREGUNTA		G2-DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
1. El arquitecto entregó el diseño al cliente, pero este le solicitó modificarlo de tal manera que el tanque mantuviera su forma cúbica, pero que su capacidad aumentará 2	a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?	Debe aumentar la medida de los lados a 2,15m, para que el volumen sea aproximadamente $10 \text{ m}^3$ $3\sqrt[3]{10} = 2,1544$	El arquitecto debe modificar el tanque aumentando 155cm de más a la longitud, quedando de 2.155 m de longitud, para que el tanque pueda aumentar su capacidad a $10 \text{ m}^3$
	<p>Los estudiantes de la institución A durante la entrevista manifestaron “usamos como dos formas la primera es que con el programa empezamos a ajustar las medidas como el cliente dice”. Para ello, movilizaron el deslizador intentado obtener que el volumen les diera 10 exacto, como no lo lograron, usaron la calculadora para hallar la raíz cubica de 10 y usaron la tecnología para comprobar y validar el conocimiento matemático. En estas acciones se evidencia las AM1, AM2 y AM3</p> <p>Los estudiantes de la institución B movilizan el deslizador hasta que el lado y el volumen coinciden con los datos iniciales de la situación, (lado= 2 m y volumen <math>8 \text{ m}^3</math>). Exploran lo que sucede en la situación mediante el movimiento del deslizador.</p> <p>Movilizan el deslizador hasta obtener un volumen cercano a 10, inicialmente lo hacen con el touch, luego, con las flechas de dirección del teclado, para lograr mover con mayor precisión el deslizador. En esta acción se evidencia una AM2**. Encuentra que el volumen más cercano a 10 es de 10.007873875, esto sucede cuando el deslizador toma el valor de 2.155. Haciendo uso de la calculadora, encuentran la diferencia entre el valor que toma el deslizador en ese punto (2.155 m) y el valor inicial del lado (2 m) [AM3] Esta diferencia le lleva a tomar como premisa que, para aumentar 2m en el volumen, se debe aumentar 155cm en el lado.</p>		
	b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Deben medir todos los lados 2,1544m</li> <li>- Debe agrandar la medida de los lados en 0,1544m</li> </ul> $3\sqrt[3]{10} = 2,1544$	Las medidas del tanque deben ser de 2.155 m de longitud, ajustándole 155 cm de más, puede hacer que la capacidad aumente $2 \text{ m}^3$ y así poder cumplir la solicitud del cliente.



		GRADO DÉCIMO	
PREGUNTA		G2-DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
	<p>Los estudiantes de la institución A, durante la entrevista manifestaron “lo que hicimos fue que al principio teníamos 2 metros (...) lo que nos dio al final le restábamos el valor del inicio” en esta afirmación, se pone evidencia una AM3, dado que coordinan la cantidad de cambio en el lado con la cantidad de cambio en el volumen.</p> <p>PROFESOR: ¿si quisiese aumentar dos metros cúbicos más le aumentaría esa misma cantidad?</p> <p>ANDRÉS: No, ... es como dependiendo de que tanto volumen se quiere ... digamos si aumentaras lo mismo nos daría un volumen diferente [aludiendo que dependía del cálculo de la raíz cuadrada]</p> <p>Institución B</p> <p>Responden esta pregunta con base en las acciones materiales realizadas anteriormente.</p>		
2- El cliente revisó el diseño del tanque y decidió aumentar otros 2 m <sup>3</sup> al volumen del tanque.	a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?	Para que el volumen sea de 12m <sup>3</sup> , debe nuevamente aumentar la medida de los lados	el arquitecto debe aumentar otros 155 cm más de longitud al tanque, para que este pueda aumentar su capacidad y poder cumplir con las exigencias del cliente cansón.
	<p>En la institución A, durante la grabación se aprecia que los estudiantes movilizan nuevamente el deslizador a al valor próximo. Evidenciado las acciones mentales mencionadas anteriormente.</p> <p>En la grabación de la institución B, se observa que el estudiante que está manejando el software, le pregunta a su compañero “cuánto toca aumentarle” a lo que él le respondo "tiene que quedar en 2.300 y pico" [se refiere a que el deslizador debe tomar una medida un poco mayor de 2.300, dado que los estudiantes tienen la hipótesis que se debe aumentar .0155m siempre que se desee aumentar 2m en el volumen]. En vista que el resultado no es 12 exacto, buscan un valor más cercano a 12 m<sup>3</sup>, obteniendo 12.008989, cuando el deslizador toma el valor de 2.29 [AM2** y AM3]. Dado este resultado, asumen como verdadera la hipótesis planteada.</p>		

		GRADO DÉCIMO	
PREGUNTA		G2-DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
	b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Todos los lados deben medir 2,2894m</li> <li>- Debe aumentar en 0,135m de la medida del lado [señala que debe restarse <math>2,2894 - 2,1544 = 0,135\text{m}</math></li> <li><math>3 \sqrt{12} = 2,2894\text{m}</math></li> </ul>	El tanque debe tener una longitud de 2.310 m ajustándole 155 cm más al anterior y 310 cm al tanque original que solo tenía una capacidad de $8 \text{ m}^3$
	<p>En la institución A, en la respuesta dada se evidencia que los estudiantes coordinan la cantidad de cambio del lado con la cantidad de cambio del volumen, haciendo evidente una AM3. Durante la grabación se aprecia que los estudiantes, de nuevo, hacen uso de otras tecnologías como la calculadora y el lápiz y papel.</p> <p>Los estudiantes de la institución B, a partir de la confirmación de la hipótesis que tenían, hacen uso de la calculadora del celular para sumar <math>155 + 155</math> y afirmar que el “el lado debe ser de 2,310 para que volumen aumente otros 2m” en esta afirmación se hace evidente la AM3</p>		
3- El cliente había olvidado unos requerimientos de su familia y solicitó al arquitecto aumentar otros $2\text{m}^3$ al volumen del tanque.	a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?	Para que el volumen sea de $14\text{m}^3$ debe nuevamente aumentar la medida de los lados	El arquitecto debe aumentar otros 155 cm al anterior modificado, ya en total modificando o aumentando 465 cm al original para que este tanque quedará con una capacidad de $14 \text{ m}^3$ , que son las exigencias totales del cliente cansón.

		GRADO DÉCIMO	
PREGUNTA		G2-DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
	<p>En la institución A, de nuevo hacen uso de calculadora para hallar la raíz cúbica de 14, para encontrar la medida del lado</p> <p>Los estudiantes de la institución B animan el deslizador para visualizar como cambia la representación en 3D. Movilizan el deslizador desde 0.155 y lo van cambiando de múltiplo en múltiplo de dicho valor, para ver el valor que toma el volumen en cada uno de estos valores. Evidenciando una AM2**</p> <p>De nuevo movilizan el deslizador, pero esta vez lo hace desde 2. un estudiante afirma "yo digo que si aumentamos 465 cm tiene que darnos 14 el volumen, si no, está mal todo" [AM3]. Para comprobarlo, mueven el deslizador hasta 2.465 obteniendo el valor de 14.977864625, decidieron aceptar la hipótesis, asumiendo que se habían pasado por milésimas, entonces por aproximación era válida la premisa. Cabe resaltar aproximan mal.</p>		
	b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta	<p>- Todos los lados ahora deben medir 2,4m</p> <p>- Debe aumentar en 0,1106m de la medida del lado [señala la operación <math>2,4-2,2894=0,1106\text{m}</math>]</p> <p><math>3 \sqrt{14} = 2,4\text{m}</math></p>	<p>debe tener una medida de longitud 2.465 m con una capacidad de volumen de <math>14 \text{ m}^3</math>.</p>
	<p>Institución A</p> <p>En la grabación se aprecia que un estudiante menciona “nuevamente debe aumentar el lado, pues si aumenta el volumen tiene que aumentar el lado” evidenciando las AM1, AM2 y AM2**. Además, se observa que usan la calculadora para buscar con exactitud la medida del lado, mientras que el software lo usan para hacer la aproximación de forma rápida.</p> <p>Institución B</p> <p>En la grabación los estudiantes reconocen que el valor que aumenta no es exacto, sino que es una aproximación. "en realidad no era 155 cm exactos, era una aproximación"</p> <p>Con base en las acciones materiales, exploraciones y conjeturaciones realizadas anteriores respondieron esta pregunta.</p>		

		GRADO DÉCIMO	
PREGUNTA		G2-DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
4- El cliente quiere saber en cuánto debe cambiar la medida del lado siempre que se desee aumentar el volumen en $2\text{m}^3$ . Ayúdale al arquitecto a elaborar un procedimiento o fórmula. Redacta un párrafo y explícale al cliente el(los) procedimientos que debería realizar para tal petición.	Estimado cliente, recibe de mi parte un cordial saludo...	<p> <math>V1 = \text{Volumen inicial}</math>  <math>M1 = \text{Medida lado inicial}</math>  <math>M2 = \text{Medida lado final}</math>  <math>V = L^3</math> </p> <p>           1. <math>3\sqrt[3]{V1+2} = M2</math>            2. <math>M2 - M1 = \text{lo que debe aumentar}</math> </p> <p>Estimado cliente, recibe de mi parte un cordial saludo. Por medio de esta le presento la fórmula, para hallar cuánto debe aumentar en la medida del lado, cada vez que quiera aumentar en <math>2\text{m}^3</math> el volumen</p>	<p>Para poder responder a su inquietud, lo que se debe hacer para aumentar <math>2\text{m}^3</math> cada vez que lo desee, debe aumentar 155 cm a la longitud del tanque, ósea, diciéndoselo como una fórmula sería</p> <p>...</p> <p><math>\text{longitud actual del tanque} + 155\text{ cm} = 2\text{m}^3 \text{ más de capacidad.}</math></p>

		GRADO DÉCIMO	
PREGUNTA		G2-DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4- DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
	<p>Los estudiantes de la institución A, durante la entrevista, manifiestan que deben obtener la raíz cúbica de la medida del volumen deseada y esto dará como resultado la medida del lado.</p> <p>Andrés: "el primer paso como ya lo habíamos hecho en los ejercicios anteriores era sacar la raíz cúbica del volumen, entonces si se quiere aumentar dos, se toma el volumen inicial (el que sea) se le aumenta dos y se le saca la raíz cúbica, entonces eso vale para el volumen, para saber cuánto debe medir el lado (...) y para saber cuánto debe aumentar debe restar cuanto debe medir el lado que le dió y cuanto medía inicialmente " en esta afirmación se evidencian AM1, AM2 y AM3 .(coordinaban los cambios de una variable con los cambios en la otra). En el siguiente En cuanto a acciones materiales los estudiantes registraron valores en la calculadora y hallaban las diferencias.</p> <p>Usan la tecnología de lápiz y papel para registrar, la calculadora para exactitud y el software como instrumento de verificación.</p> <p>Institución B</p> <p>Con base en las exploraciones y en las acciones materiales realizadas, los estudiantes responden a la pregunta, respuesta en la que se evidencia las AM1, AM2 y AM3.</p> <p>Se puede inferir que la instrumentación brindada por software permitió y favoreció la conjeturación de premisas e hipótesis, así mismo, permitió la verificación y comprobación de estas.</p>		

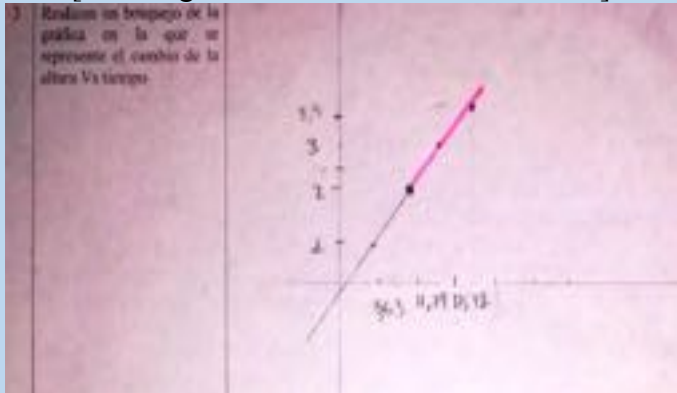
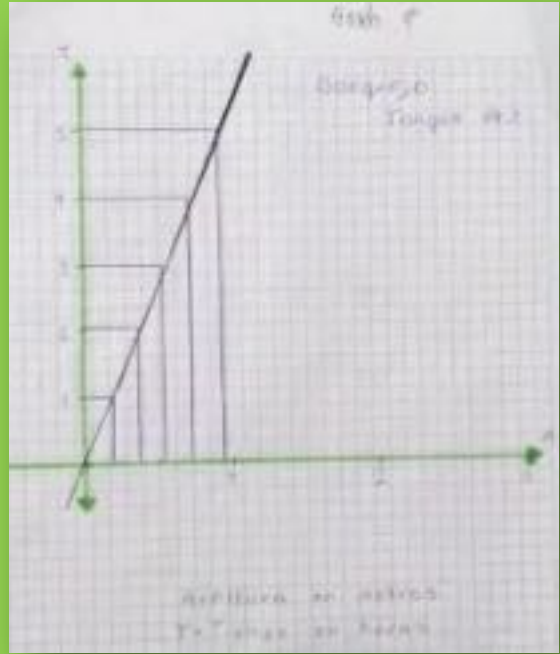
## 4.1.3 Central de servicios

## 4.1.3.1 Grado noveno

Tabla 11: Respuestas y análisis - Tarea 3, Grado noveno, tanque A

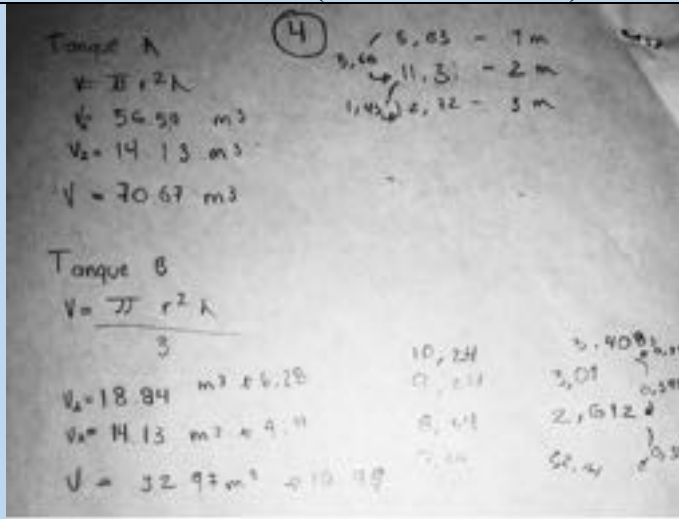
		PREGUNTA	GRADO NOVENO	
			G1. NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3. NOVENO (INSTITUCIÓN B)
TANQUE A	1	En el tanque A, ¿Qué es lo que cambia? Justifiquen su respuesta	La altura del líquido cambia al ser la variable dependiente	En cuanto su forma no es muy común ya que son dos cilindros juntos, uno encima del otro. Hay una relación entre tiempo y altura ya que si aumenta el tiempo aumentara la altura.
		Análisis pregunta 1	<p>En la institución A, los participantes expresan una relación de dependencia entre la altura del líquido y el recorte de la lámina, evidenciando una AM1. Al revisar la grabación se observó que mueven el deslizador para obtener cantidades exactas en la altura y observar el tiempo transcurrido, hacen uso de calculadora para hallar las diferencias. Se muestran confusos en entender la razón de llenado. En la entrevista, reconocen que este problema les pareció el más complicado, además se evidencia la confusión cuando manifiestan que “el programa nos mostraba que el más grande [refiriéndose al tanque] se llenaba a menor velocidad ambos terminaban con la misma capacidad” en esta afirmación se evidencia que los estudiantes no identificaron que los tanques se llenaban a una misma razón, y estaban confundiendo el volumen con la altura del líquido.</p> <p>En la institución B, revisando el video, se aprecia que los estudiantes mueven el deslizador hasta una hora, observan la altura del líquido para ese tiempo, y lo van registrando en lápiz y papel. Repiten el proceso, tomando valores enteros de tiempo 1, 2, 3, ...13 y 14,37 horas. Elaboran una tabla de valores en la que se relaciona el tiempo y la altura, aclarando que la altura en cada uno de los cilindros es de 2m y la altura total del tanque es de 4m. En estas acciones se evidencia que la información brindada por el software incide en las estrategias de solución, evidenciando el proceso de instrumentación. Un estudiante manifiesta “en cuanto más aumente el tiempo, también aumenta la altura (...) hay una relación entre</p>	

PREGUNTA		GRADO NOVENO	
		G1. NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3. NOVENO (INSTITUCIÓN B)
2		ambos" en esta afirmación se puede notar que coordinan la dirección de cambio del tiempo con la dirección de cambio de la altura, además, identifican una relación de dependencia entre ellas, poniendo en manifiesto las acciones mentales AM1 y AM2. Su compañero complementa diciendo "hay una relación entre tiempo y altura, y, que cuando aumenta el tiempo también aumenta la altura" evidenciando las mismas acciones mentales.	
	Describan ¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?	Después de que se llena la primera figura es menos el tiempo necesario debido a que el volumen de la segunda figura es menor	La altura del líquido que se encuentra aumenta según el tiempo que lleve llenándose, depende también de la parte que se esté llenando del cilindro, por ejemplo, la parte inferior con un radio de 3m durará el doble del tiempo en llenarse en comparación con el cilindro superior de radio menor 1.5m
	Análisis pregunta 2	<p>Los estudiantes de la Institución A identifican que la razón de llenado en el tanque es constante, pero al estar constituido por dos formas (de diferentes volúmenes) la altura de llenado de cada una cambiaría a diferente ritmo. Se puede apreciar cuando un estudiante manifiesta “digamos que nosotros conservamos la velocidad a la que se está llenando, pues obviamente el tanque más grande se demora más (digamos se demora dos horas en llenarse) pero al ser el otro más pequeño pues tiene menor capacidad - menor volumen pues se demora menos tiempo en llenarse”, mostrando, de manera discursiva, un indicio de AM3 y AM4, pues reconocen que dicha velocidad cambia a acuerdo con la forma del tanque que se esté llenando. Esta misma acción mental se manifiesta cuando los estudiantes, al intentar corroborar y sentido a la información que les brinda el GeoGebra, calculan el volumen de cada forma y lo dividen entre la razón de llenado.</p> <p>Al revisar la grabación y la respuesta dada en el cuestionario se aprecia que los estudiantes de la institución B, reconocen que “el radio de cada uno es diferente [...] este (señala con el cursor el cilindro de radio menor) se va a demorar la mitad de lo que se demore este (señala con el cursor el cilindro de radio mayor) porque, uno tiene un radio de 1,5 y el otro de 3 m”. Al reconocer que el tiempo de llenado</p>	

PREGUNTA		GRADO NOVENO	
		G1. NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3. NOVENO (INSTITUCIÓN B)
3		<p>de una forma es la mitad del tiempo de llenado de la otra forma, están reconociendo la cantidad de cambio de manera discursiva. Por lo tanto, en dicha afirmación se puede apreciar que los estudiantes coordinan la cantidad de cambio, del tiempo con la cantidad de cambio del volumen, evidenciando una AM3. Esta misma acción mental se evidencia cuando un estudiante le explica al otro porque la altura del líquido depende de la parte del tanque que se esté llenando. "la parte inferior (...) dura más de 11 horas llenándose y la otra [se refiere al cilindro de radio menor] solo dura (...) 3 horas y un poquito más Casi cuatro horas llenándose".</p>	
	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo	<p>[ver imagen G1- S3-TA.3- VIVYCAM-9]</p>  <p>Imagen 14: Respuestas - tarea 3 - p3-inst_A - G9 – tanque A</p>	 <p>Imagen 15: Respuestas - tarea 3 - p3-inst_B - G9 – tanque A</p>



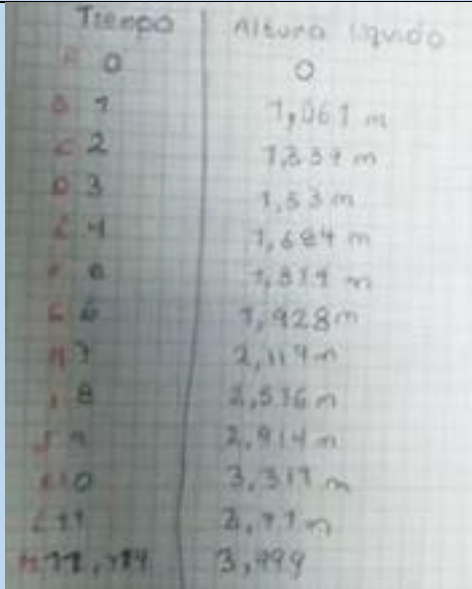
PREGUNTA		GRADO NOVENO	
		G1. NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3. NOVENO (INSTITUCIÓN B)
	Análisis pregunta 3	<p>Los estudiantes de la institución A, durante la entrevista al solicitarles que explicaran la gráfica, manifestaron que “la colocamos recta pues porque a medida que pasa el tiempo crecía la altura de llenado” evidenciando una AM2, pues están coordinando la dirección de cambio del tiempo con la dirección de cambio de la altura.</p> <p>Los estudiantes de la institución B, a pesar de que reconocen que la altura del líquido depende de la parte del tanque que se esté llenando, solamente graficaron la parte inferior. En la entrevista, cuando se les pide a los estudiantes que expliquen cómo realizaron la gráfica, los estudiantes manifiestan “lo que hicimos al inicio fue poner horas exactas para saber que pasa cada vez que pasa una hora y esta es la altura que tiene” [refiriéndose a la altura en cada uno de los valores que tomaron del tiempo]</p> <p>en esta afirmación se puede evidenciar que los cambios uniformes en el tiempo lo hicieron buscando cambios iguales que les permitiera saber cuánto cambia la altura, evidenciando una AM3. En la grabación se aprecia que los estudiantes, para realizar la gráfica, tomaron los datos de la tabla que construyeron en el primer punto, y ubicaron las parejas ordenadas de puntos, del tiempo con la respectiva altura y trazaron los segmentos entre cada par consecutivo de puntos. Cabe resaltar que a pesar de que los estudiantes habían construido la tabla con valores del tiempo enteros hasta 14,37, en la gráfica solo lo hicieron hasta el tiempo igual a 5, en la se muestra el comportamiento de solo del cilindro de radio mayor.</p>	
	Podrían establecer una manera para especificar ¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo? ¿Qué datos requieres para ello?	<p>Necesitamos saber la altura que tiene el agua al transcurrir una hora y tabular con diferentes tiempos. Ej. en el respaldo de la hoja [ver imagen G1- S3-TA-4- VIVYCAM 9]</p>	<p>Si, el resultado sería un valor aproximado del valor de la altura del líquido respecto al tiempo que lleve llamándose el tanque. La altura aumenta en relación en la que aumenta el tiempo, radio, el tiempo, altura del líquido y el tanque.</p>

PREGUNTA		GRADO NOVENO	
		G1. NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3. NOVENO (INSTITUCIÓN B)
		 <p>Imagen 16: Respuestas – tarea 3 - p4 – inst A - G9 – tanque A</p>	
	<b>Análisis pregunta 4</b>	<p>Los estudiantes de la Institución A muestran AM2 y AM3, pues coordinan la dirección de cambio del tiempo con la dirección de cambio del volumen, así mismo, coordinar la cantidad de cambio entre dichas magnitudes. En la imagen 15 se muestra que cambian de tecnología, pasan de la TD a lápiz y papel. Además, realizan cálculos en la calculadora, para hallar el volumen de la forma 1 del tanque (cilindro de radio mayor) 1 y, calculan el volumen de la forma 2 del tanque (cilindro de radio menor), también calculan el volumen total sumando forma 1 y forma 2. Seguidamente identifican el tiempo total de llenado que GeoGebra arrojaba. [a pesar de que los estudiantes reconocen una razón de cambio de llenado “global”, saben también que una de las formas tardará más en llenarse; igualmente saben que la altura de llenado en cada forma incrementara a diferente ritmo. La AM4 se hace presente cuándo los estudiantes dividen el volumen total del tanque entre el tiempo total de llenado, hallando una razón de cambio promedio de llenado.</p> <p>Al revisar la grabación se observa que los estudiantes de la Institución B hacen uso de los conceptos previos para idear una estrategia de solución. Esto se manifiesta cuando un estudiante le dice a su compañero "bueno, entonces esto es como lo de las funciones, establecer (...) como un patrón para decir</p>	

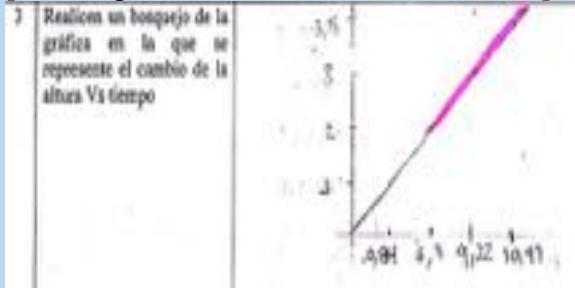
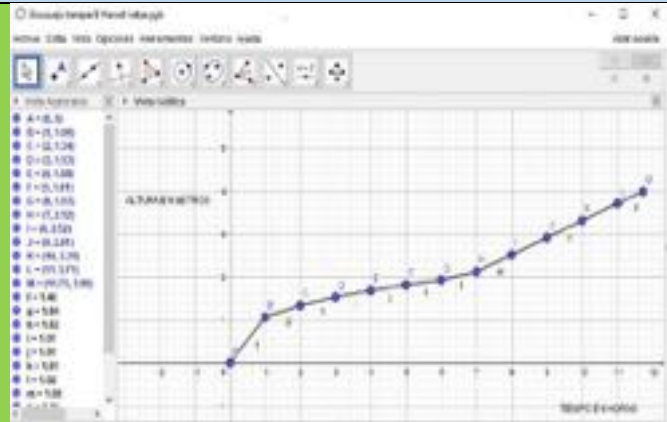
PREGUNTA		GRADO NOVENO	
		G1. NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3. NOVENO (INSTITUCIÓN B)
5		<p>cómo cambia el tiempo con respecto a la altura del líquido en el tanque" [hacen una lista de los elementos que consideran necesarios para poder establecer cuánto cambia la altura del líquido con respecto al tiempo]. Cuando uno de los estudiantes afirma "lo primero que podríamos especificar sería que cada vez que aumente el tiempo aumenta la altura (...) porque aquí nada se puede disminuir" se pone en manifiesto [AM2].</p> <p>Los estudiantes movilizaron el deslizador desde que el tiempo era una hora, para mirar cuánto cambia la altura. Luego, ubicaron el deslizador en dos horas, y observaron que no aumentó el doble de 18 cm [tenían la premisa que iba a aumentar el doble, porque, el aumento debía ser el mismo (18 cm), dado que un cilindro tiene un radio de 1,5 y el otro de 3 m]. En estas acciones se pone en evidencia que el programa permite a los estudiantes comprobar sus hipótesis o conjeturas, así mismo, permite modificar sus estructuras y esquemas mentales.</p> <p>Posteriormente, ubicaron el deslizador en tiempo igual a tres horas y encontraron la diferencia entre la altura contenida para este tiempo y la altura correspondiente para el tiempo inmediatamente anterior. Debido a que el valor obtenido fue de 18, los llevó concluir que cada hora crece 0,18 m, en la parte inferior del tanque. [AM4]</p>	
	¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?	$11.3/2 = 5,65 \text{ m}^3/\text{hora}$	<p>sí, aunque eso depende del radio. En el cilindro inferior, la altura del líquido crece cada hora un aproximado de 0.18 metros, mientras que en cilindro superior aumenta el doble cada hora porque tienen un radio de 1.5 m.</p>
	Análisis pregunta 5	<p>En la respuesta dada en el cuestionario, los estudiantes de la institución A manifiestan una AM4, pues toman el tiempo total de llenado (obtenido en la simulación) y lo dividen entre dos [dado que toman el tanque como una sola figura que está compuesta por dos formas diferentes] obteniendo una razón de llenado promedio.</p> <p>Los estudiantes de la institución B, en la respuesta dada en el cuestionario, evidencian una razón de cambio promedio, poniendo en manifiesto una AM4. Al hacer una revisión a la grabación se observó que para dar respuesta a esta pregunta hicieron uso de las acciones materiales realizadas en el punto anterior.</p>	

Tabla 12: Respuestas y análisis - Tarea 3, Grado noveno, tanque B

			GRADO NOVENO	
PREGUNTA			G1. NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3. NOVENO (INSTITUCIÓN B)
TANQUE B	1	En el <b>tanque B</b> , ¿Qué es lo que <b>cambia</b> ? Justifiquen su respuesta	cambia la altura del líquido con el paso del tiempo por qué y (la altura del líquido) es la variable dependiente.	En el tanque B, ya que son dos figuras unidas de diferente radio y ambos no son cilindros, uno es un cilindro y posee el radio menor (2m) ubicado encima del cono que posee un radio de 4m y esta boca abajo.
		<b>Análisis pregunta 1</b>	<p>Al revisar la grabación se encuentran que tanto los estudiantes de la institución A, como los estudiantes de la institución B, replican los procesos de solución empleados en el problema anterior (tanque A), al igual en ambas instituciones se hace un cambio de tecnología, pasan de la TD al uso de lápiz y papel.</p> <p>Los estudiantes de la institución A, en la respuesta dada en el cuestionario ponen en manifiesto una AM1, pues coordinan los cambios del tiempo con los cambios en la altura del líquido y reconoce una relación de dependencia entre dichas magnitudes. Al revisar la grabación se encuentra que los estudiantes compararon la altura en tiempos exactos (es decir en 1, 2, 3 Y 4 HORAS) y observaron a partir de los datos arrojados por el programa los valores de la altura del líquido. De igual manera determinan el volumen de cada una de las formas que conforman el tanque B. Buscaron valores exactos en el tiempo en los que se les facilitará realizar cálculos mediante el uso de la calculadora y en lápiz papel. Manifestaron que les hizo falta la representación tabular del problema.</p> <p>Revisando las grabaciones, los estudiantes de la institución B, movieron el deslizador, tomando valores enteros de tiempo 1, 2, 3, ...11 y 11,729 horas, observaron la altura del líquido para cada uno de estos tiempos y los registran en lápiz y papel, elaboran una tabla de valores en la que se relaciona el tiempo y la altura, aclarando que la altura total del tanque es de 4m. Como se muestra en la imagen 16, se evidencia que los estudiantes coordinan la dirección de cambio del tiempo con la dirección de cambio en la altura del líquido, así mismo, coordina los cambios de una variable con los cambios en la otra, manifestando AM1 y AM2.</p>	

			GRADO NOVENO	
PREGUNTA			G1. NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3. NOVENO (INSTITUCIÓN B)
			 <p>Imagen 17: Tabla LP TB instB</p>	
	2	Describan ¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?	La segunda figura se demora menos en llenar por que el volumen es menor	Existe una relación entre tiempo y altura por que los dos aumentan simultáneamente, no existe una variación exacta a medida que aumente la altura del líquido según el tiempo, ya que el radio mayor del tanque B no posee una figura completa, porque es un cono y un cono es la tercera parte de un cilindro.

			GRADO NOVENO	
PREGUNTA			G1. NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3. NOVENO (INSTITUCIÓN B)
		<b>Análisis pregunta 2</b>	<p>Los estudiantes de la institución A, observaron, a partir de la simulación, los cambios en la velocidad de cambio en la altura. Un estudiante manifiesta “después de que se llena la primera figura es menos el tiempo necesario para llenar el tanque” en esta afirmación se evidencia una AM3, pues reconocen el cambio en el tiempo de manera cualitativa y lo coordinan con el volumen. Sin embargo, al parecer confundían o no les era clara la diferencia entre volumen y altura, pensaban en la variable volumen cuando referían a la altura [obstáculo generado por la presentación en la velocidad de llenado que se daba inicialmente]</p> <p>Los estudiantes de la institución B en la frase: “existe una relación entre tiempo y altura por que los dos aumentan simultáneamente” evidencian una AM1 y AM2, pues coordinan la dirección de cambio del tiempo con la dirección del cambio de la altura. Observando la grabación se puede apreciar que los estudiantes intentan buscar alguna regularidad con los cambios es la altura del líquido [tenían como premisa que los cambios en la altura del líquido iban a ser constantes como sucedió con el tanque A]. En este proceso, hallaron las diferencias entre la altura del líquido en un valor del tiempo, y la altura del líquido en el tiempo inmediatamente anterior [recuérdese que tomaron valores enteros de tiempo], poniendo en manifiesto una AM3. Una vez se dieron cuenta que dichos cambios en la altura del líquido no eran uniformes, intentaron dar una explicación de este fenómeno.</p> <p>Iratze: " se puede hallar una relación de cómo cambia la altura desde que comienza el cilindro, pero es muy difícil hallar una relación antes del cilindro, porque el cono (...) sus líneas van diagonales (refiriéndose a la generatriz) ósea, son así como las manitos" (une las manos desde las muñecas y las separa desde la punta de los dedos, asemejando la forma de un cono)</p> <p>- Harold: "entonces al momento de subir el líquido, se va a llenar mucho más rápido la parte de abajo que la parte de arriba, [AM2] porque la parte de arriba es más ancha"</p> <p>- los estudiantes justifican que, si existe una relación entre el tiempo y la altura, porque si aumenta el tiempo, aumenta la altura [AM2], pero no es una relación "exacta" porque no se puede garantizar que sea igual [los cambios en la altura que va tomando el líquido no son uniformes] y lo justifican por</p>	

GRADO NOVENO		
	PREGUNTA	<div>G1. NOVENO (INSTITUCIÓN A)</div> <div>G3. NOVENO (INSTITUCIÓN B)</div>
		<p>que el cono es la tercera parte de un cilindro.</p> <p>- Iratze: " acá (señala con el cursor el cilindro) si yo hago que x sea la altura y Y el tiempo, me puede dar una relación su yo hago una operación, porque esto (señala con el cursor el lado del cilindro) está igual es una línea recta (...) no me va a afectar, pero mire acá (señala con el cursor la generatriz del cono) está en diagonal, acá se va a llenar más rápido la primera puntica (se refiere al vértice del cono) que este pedazo (señala con el cursor la parte superior (base) del cono)"</p> <p>Iratze: "no existe una variación exacta, por ejemplo, que yo diga cada hora la altura aumenta un metro, no, porque no se puede" [argumentan que no es posible, debido a que no encuentran una expresión algebraica que representara el crecimiento de la altura]</p> <p>Los estudiantes identifican que la velocidad con la que crece la altura del líquido, en la parte del cono, va disminuyendo a medida que aumenta la altura del líquido.</p>
3	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo	<div> <div>[ver imagen G1- S3- TA-4- VIVYCAM 9]</div> <div>  <p>Imagen 18: Respuestas - tarea 3 - p3-inst_A - G9 – tanque B</p> </div> <div>  <p>Imagen 19: Respuestas – tarea 3 - p3-inst_B - G9 – tanque B</p> </div> </div>

		GRADO NOVENO	
PREGUNTA		G1. NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3. NOVENO (INSTITUCIÓN B)
	Análisis pregunta 3	<p>Los estudiantes de la institución A reconocen que ambas magnitudes crecen AM2, sin embargo, representan con una gráfica. intentan buscar una representación algebraica que concuerde con la representación gráfica realizada, pero no logran identificar la gráfica adecuada. Por otro lado, se observa en la gráfica un manejo inadecuado de las escalas para realizar gráficas.</p> <p>Los estudiantes de la institución B reconocen que "la gráfica va a tener una forma rara", para tener mayor precisión, decidieron realizar la gráfica en GeoGebra. Para ello ubicaron los puntos de las parejas ordenadas que obtuvieron en el momento de construir la tabla de valores. Luego, unen un par consecutivo de puntos con segmentos. A pesar de que los estudiantes no realizaron una verbalización de la consciencia de la razón de cambio promedio; el proceso de construcción fue realizado con segmentos de rectas secantes contiguas para el dominio, evidenciando así una AM4.</p>	
	4 Podrían establecer una manera para especificar ¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo? ¿Qué datos requieres para ello?	<p>Suponiendo que el tiempo está expresado en horas</p> <p>Por cada hora aumenta 0,398 m^3</p>	<p>No, porque su primera parte no es una figura exacta o completa, es un cono. Requeriría para ello el tiempo, radio y la altura.</p>
	Análisis pregunta 4	<p>Al revisar la grabación, los estudiantes de la institución A comparan los cambios en ambas magnitudes atendiendo el movimiento del deslizador con el cursor, aumentan una centésima en el deslizador tiempo y observan cuanto cambia en la magnitud altura poniendo en manifiesto una AM3. Buscan regularidades y reconocen que el fenómeno no se comporta de manera constante en el recipiente en forma de cono. Además, reconocieron que es constante la diferencia cuando se llena el cilindro. [lo hicieron a partir de las diferencias entre las alturas]</p> <p>Los estudiantes de la institución B, teniendo en cuenta la discusión dada en el segundo punto,</p>	



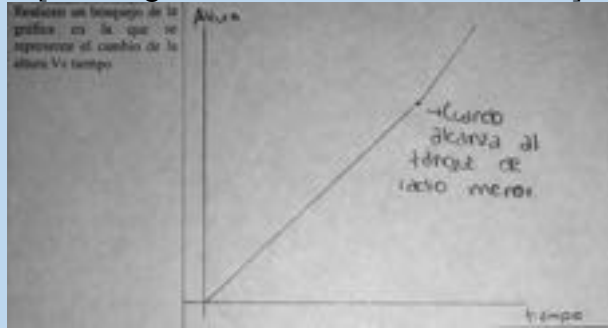
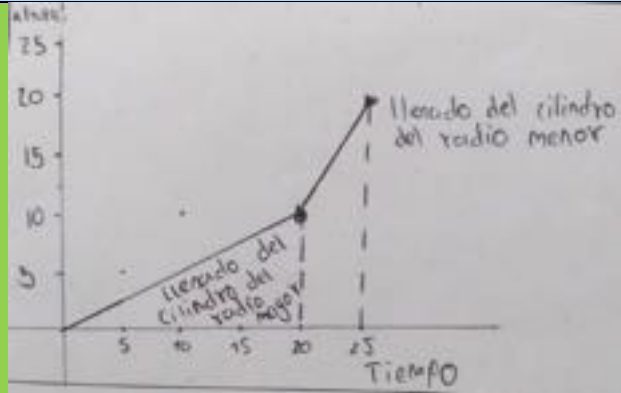
			GRADO NOVENO	
PREGUNTA			G1. NOVENO (INSTITUCIÓN A)	G3. NOVENO (INSTITUCIÓN B)
			afirman que no es posible establecer una manera de cuanto cambia la altura con respecto al tiempo. Un estudiante manifestó “no es posible porque no crece con una razón exacta” [se refiere a que los incrementos o cambio en la altura del líquido del cono no son uniformes, así los cambios en el tiempo lo sean]	
5		¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?	$3996/11.719 = 0,398\text{m}^3/\text{hora}$	Si es posible, gracias a la herramienta que estamos utilizando, aunque manualmente es más extenso. porque nos brinda dos datos automáticamente: el tiempo y la altura del líquido.
		<b>Análisis pregunta 5</b>	<p>Revisando la grabación de los estudiantes de la institución A un estudiante manifiesta “dividimos la altura dividiendo el tiempo da una razón de llenado”. Esta afirmación junto con la respuesta dada en el cuestionario evidencia una AM4 razón de cambio promedio. Esta misma acción mental se puede corroborar durante la entrevista cuando se les pregunta que si la razón de llenado en el cono es la misma que la razón de llenado en el cilindro, a lo que los estudiantes responden que no es la misma, un estudiante afirma “nosotros lo que hicimos fue tomar toda la altura del tanque” lo interrumpe el otro estudiante para complementar “y supimos que la velocidad de llenado era constante, entonces, sacamos como el promedio”. Al tomar el tanque completo, los estudiantes están dando muestras de una comprensión de una razón de cambio promedio a nivel cualitativo (no diferencian dos comportamientos de llenado diferentes, afectados por la forma del tanque).</p> <p>Los estudiantes de la institución B a pesar de que reconocen que debe ser posible gracias al software que se está empleando, resaltando el potencial para realizar cálculos y precisión de las simulaciones. Muestran una incongruencia con la respuesta anterior.</p>	

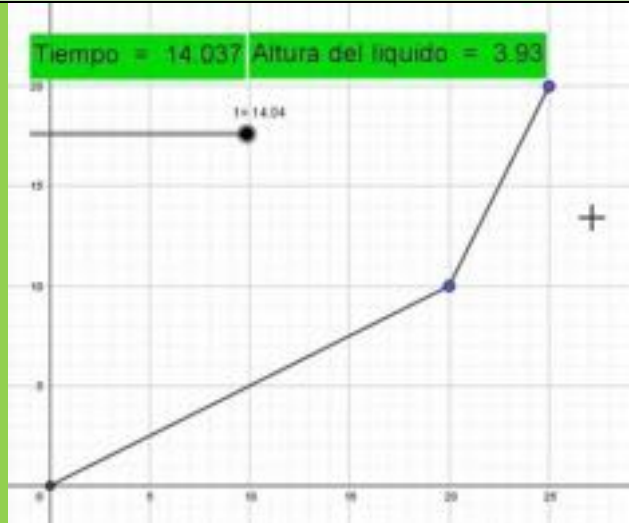
## 4.1.3.2 Grado décimo

Tabla 13: Respuestas y análisis - Tarea 3, Grado décimo, tanque A

		PREGUNTA	GRADO DÉCIMO	
		PREGUNTA	G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
TANQUE A	1	En el tanque A, ¿Qué es lo que cambia? Justifiquen su respuesta	El tiempo y los metros cúbicos ( $m^3$ ) del líquido inflamable que contiene el tanque.	la altura del líquido inflamable dentro del tanque según el tiempo, entre más tiempo se esté llenando pues va a estar subiendo la altura del líquido en el tanque.
		Análisis pregunta 1	<p>Tanto los estudiantes de la institución A como los estudiantes de la institución B, movilizaron el deslizador rápidamente para visualizar el comportamiento general del llenado del tanque, de igual manera, movilizan el deslizador más despacio para tener una idea más real del fenómeno. Con estas acciones se evidencia que el programa influye en las estrategias de solución al problema, en las hipótesis y conjeturas a las que puede llegar los estudiantes.</p> <p>Los estudiantes de la institución A durante la entrevista manifiestan “el tiempo siempre cambia y los metros (...) es un cilindro, entonces ahí nos dimos cuenta de que se iba llenando constantemente, a diferencia de por ejemplo el cono que al inicio se llena más rápido y después más lento ” en esta afirmación, se interpreta que los estudiantes realizan una descripción cualitativa de la cantidad de cambio, poniendo en evidencia una AM3. Otro estudiante manifiesta que “A medida que va pasando el tiempo, los metros cúbicos aumentan” AM 2</p> <p>Los estudiantes de la institución B inicialmente movilizaron deslizador, luego lo animaron, para visualizar qué sucedía y qué cambia en el tanque. Un estudiante, al ver la animación, reconoce que "cambia la altura del líquido(...) según el tiempo" (AM1). Con respecto a lo anterior podría decirse que hubo un proceso de instrumentación con los estudiantes, pues la herramienta les brindó la posibilidad de generar estrategias de resolución, construir y modificar sus esquemas, permitiéndoles evolucionar las concepciones previas. A su vez, la evolución de esquemas</p>	

	PREGUNTA	GRADO DÉCIMO	
	PREGUNTA	G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
		mentales que permite la instrumentación favorece el paso de una acción mental a otra de mayor complejidad.	
2	Describan ¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?	Cambia en razón al tiempo, es decir cuando el tiempo aumenta, los $m^3$ contenidos en el tanque también aumentan, pero cuando llega a la parte del radio menor se llena más rápido, porque su volumen es menor.	Cambia la rapidez de llenado (del radio menor) del cilindro de mayor radio con la de menor, porque tiene más capacidad el cilindro de radio mayor, lo que hace que se demore menos el de radio menor ya que no tiene la misma capacidad.
	Análisis pregunta 2	<p>En la respuesta dada por los estudiantes de la institución A en el cuestionario, se puede apreciar en “Cambia en razón al tiempo, es decir cuando el tiempo aumenta, los <math>m^3</math> contenidos en el tanque también aumentan” una AM1 y AM2.</p> <p>En las respuestas brindadas en la Institución B en expresiones como “el más pequeño tiene menos espacio, entonces, tiene menos capacidad de líquido inflamable” y “entre más capacidad, más se demora para llenar” se hace evidente la presencia de AM2.</p> <p>Movilizaron el deslizador hasta que la altura del líquido era de 2 m (hasta llenar el cilindro de radio mayor), encontrando que el tiempo transcurrido es de 11.3 horas. Continúan moviendo el deslizador hasta que se llena por completo el tanque, y determinan que el tiempo transcurrido fue de 14.037 horas. En esta acción se evidencia una AM3, dado que cuantifican el tiempo de llenado y lo coordinan con la altura de los cilindros que conforman el tanque.</p> <p>En el momento en que los estudiantes hacen uso de la calculadora para hallar el tiempo que se demoró en llenar el segundo tanque (encontrando la diferencia entre los tiempos de llenado del tanque de radio mayor y la figura completa) estamos en presencia de AM3.</p>	

	PREGUNTA	GRADO DÉCIMO	
	PREGUNTA	G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
3	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo	<p>[ver imagen G2-S3-TA-3-VERYAND-10]</p>  <p>Imagen 20: Respuestas - tarea 3 - p3-inst_A - G10 – tanque A</p>	 <p>Imagen 21: Respuestas - tarea 3 - p3.1-inst_B - G10 – tanque A</p>

PREGUNTA		GRADO DÉCIMO	
	PREGUNTA	G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
			 <p><i>Imagen 22: Respuestas - tarea 3 - p3.2-inst_B - G10 – tanque A</i></p>
	<b>Análisis pregunta 3</b>	<p>Se encontró que los estudiantes de la institución A no usaron la tecnología para realizar la gráfica.</p> <p>VERÓNICA: "colócalo por ejemplo a 10 segundos para ver en cuanto esta"</p> <p>ANDRÉS: "Ahí si toca mejor con el cursor" [pone la flecha del mouse en el deslizador y lo moviliza con el teclado]. Se muestra una acción material de cuantificar uniformemente, reconociendo que cuando se anima con el mouse se presentan velocidades no uniformes, a diferencia del teclado con el cual se puede controlar el cambio. AM3</p> <p>En entrevista posterior, manifestaron que a partir de los cambios controlados identificaron que cada "0,5 segundos la altura del líquido aumentaba en 0,01" Dando indicios de AM1, AM2, AM3 y pistas de AM4 [pues está intrínseca una noción de pendiente].</p> <p>Una acción material realizada consistió en elegir un intervalo cercano al cambio de forma del</p>	

	PREGUNTA	GRADO DÉCIMO	
	PREGUNTA	G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
		<p>tanque e identificar la razón de cambio [contando los movimientos del cursor y observando la gráfica, simultáneamente visualizar cuando se presentaba el cambio de forma]. Esto les permitió a los estudiantes validar conjeturas y corregirlas pues se dieron cuenta que aumentaba “una línea” cada 0,06 segundos.</p> <p>Otro aspecto fundamental frente a uso de tecnología y acciones materiales está asociado a que pudieron reiniciar varias veces la simulación, llevando a valores de cero en el deslizador y repetir la observación, cuantas veces quisieran.</p> <p>En la Institución B, los estudiantes inicialmente realizaron la gráfica en hoja y papel. Para ello, tomaron el tiempo en el que se llenó el tanque de radio mayor con su respectiva altura. Luego tomaron el tiempo total empleado en llenarse el tanque y lo ubicaron con la altura total del tanque. Luego, hicieron el bosquejo de la gráfica en el mismo archivo de GeoGebra, utilizando la herramienta de "segmentos". Dado que la gráfica la realizan con segmentos de rectas secantes continuas, se evidencia una AM4.</p> <p>- "digamos que aquí así es el cilindro de radio mayor" (traza un segmento desde el origen del plano, con una pendiente suave, <math>[0,5]</math>) [cuando dice 'digamos que aquí así', se está refiriendo al comportamiento de la altura del líquido en el intervalo de <math>(0, 11.3)</math> h].</p> <p>- "entonces digamos que el llenado es constante del cilindro (...) entonces, como el otro tiene menos radio y tiene un llenado más rápido, entonces esta [se refiere a la gráfica del llenado del tanque de radio menor] ya no iría igual a la otra, sino, ya iría un poco más rápido que la anterior" (traza un segmento desde el lado final del segmento anterior, con una pendiente mayor, <math>[2]</math>) AM3</p>	

	PREGUNTA	GRADO DÉCIMO	
	PREGUNTA	G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
4	Podrían establecer una manera para especificar <b>¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo? ¿Qué datos requieres para ello?</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Cada 0,06 s la altura del líquido aumenta en <math>0,01\text{m}^3</math></li> <li>- Analizar con varios datos cual es la variación.</li> <li>- Cuando llega al tanque de radio menor su altura aumenta en <math>0,01\text{m}^3</math> cada 0,02 s</li> </ul>	Una manera para especificar cuánto cambia la altura con el tiempo, requerimos datos como la altura en metros y el tiempo en horas, para así ir llenado una hora poder saber cuánto lleno en metros de altura, e ir mirando cuánto va subiendo la altura según las horas y restar la hora de llenado siguiente con la anterior para poder saber cuánto hay de diferencia de llenado entre cada hora.
	<b>Análisis pregunta 4</b>	<p>En Institución A, en la entrevista, ante la pregunta ¿Cómo encontraron esa respuesta? los estudiantes contestaron "con el programa, empezamos a mirar aumentando de 1 en 1 y mirando cada cuanto de tiempo aumentaba <math>0,01\text{ m}^3</math>, entonces cada 0,06 segundos el volumen aumentaba <math>0,01</math>" en la afirmación se manifiesta una AM3. Además, reconocen que en la segunda forma del tanque A (cilindro de radio menor) la razón de llenado es tres veces más rápido</p> <p>Revisando los videos se encontró que los estudiantes realizaban los movimientos de deslizador ordenadamente y coordinaban y comparaban los cambios den el tiempo y la altura del tanque. Al contar los movimientos del cursor y al determinar regularidades de cambio para cada forma del tanque estamos en presencia de AM 1, 2, 3 y 4.</p> <p>Revisando la grabación, en la institución B, los estudiantes presentan un dialogo que da cuenta del proceso que llevaron a cabo para saber cuánto cambia la altura con respecto al tiempo.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Hugo: "entre más tiempo de llenado, pues, más altura del líquido" [AM2]</li> <li>- Jonatan: "lo que tenemos que hacer es saber cuánto se llenó en una hora, luego en dos y así" AM3</li> </ul> <p>mueven el deslizador a una hora y observan que la altura es de 0.18 m, lo que da pie a que a que</p>	

	PREGUNTA	GRADO DÉCIMO	
	PREGUNTA	G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
		los estudiantes tomen como premisa que siempre va a aumentar 0,18 m cada hora. [la información que les arroja el programa favorece la elaboración de conjeturas] Sin embargo, cuando los estudiantes movilizan el deslizador a 2 horas, 3 horas y así sucesivamente hasta alcanzar la altura del tanque de radio mayor (2 m) se dan cuenta que no siempre aumenta 0,18 m. [en este caso, el mismo programa les hace dudar la conjetura inicial]. Para validar o no la conjetura los estudiantes hacen uso de otras tecnologías como el lápiz papel. De nuevo se evidencia que el software favorece construir y modificar los esquemas mentales, proceso en el que se destaca la instrumentación.	
5	¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?	<p>-Tanque de radio mayor</p> $0,01/0,06 = 1m^3/6 \text{ s}$ <p>- Tanque de radio menor</p> $0,01/0,02 = 1m^3/2 \text{ s}$	la rapidez de llenado del cilindro de radio mayor es de 0.18m constantes por cada hora, pero, cuando acaba sus dos metros de altura a las 11.31 horas transcurridas, empieza con el cilindro de la mitad de ese radio, avanzando 4 veces más rápido que el cilindro de mayor radio.
	Análisis pregunta 5	<p>Analizando las respuestas brindadas por los participantes de la Institución A, es evidente la presencia de AM3y AM4. En el siguiente fragmento se presenta un buen ejemplo:</p> <p>PROFESOR:” si yo les pregunto ¿cuánto tiempo tarda ese tanque en llenarse? Ustedes que me dirían.</p> <p>VERÓNICA: "pues yo tomaría la altura (refiriéndose a la altura de cada tanque) y dividiría por esto [aludiendo la razón de llenado]”</p> <p>ANDRÉS: “Si calcularíamos los dos [aludiendo al tiempo de cada tanque] ... no sabemos si podemos calcular los dos al mismo tiempo, por el hecho de que cada uno tiene un volumen y un radio diferente, entonces puede que tengan la misma altura, pero se va a llenar uno más rápido que el otro”.</p> <p>Dentro de las acciones materiales más destacadas estaban, repetir el experimento, contar los saltos</p>	



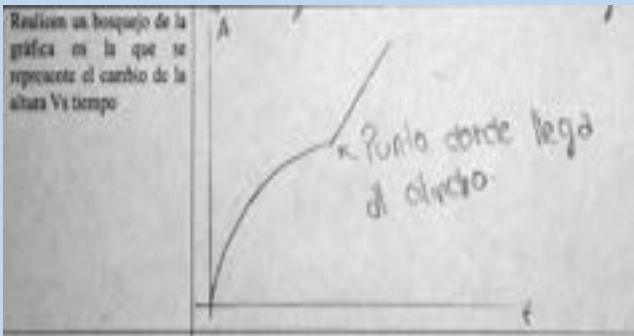
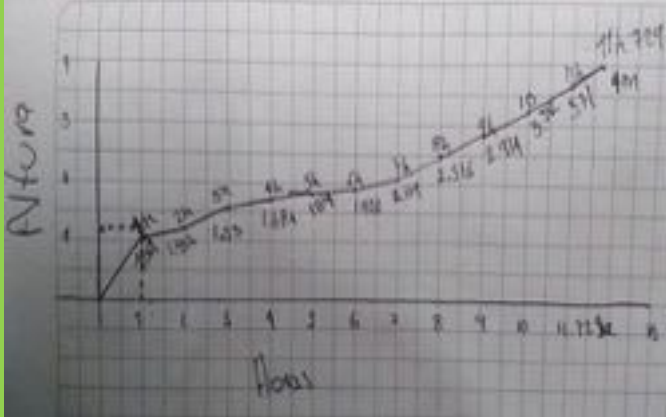
	PREGUNTA	GRADO DÉCIMO	
	PREGUNTA	G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
		<p>de manera uniforme, comparar valores en las magnitudes y estimar diferencias entre ellas.</p> <p>Institución B</p> <p>Cuando los estudiantes dan como respuesta “la rapidez de llenado del cilindro de radio mayor es de 0.18m constantes por cada hora” se evidencia una AM4, pues se está tomando una razón de cambio promedio, para cambios uniformes en el tiempo.</p> <p>Las acciones materiales que realizaron en el punto anterior se sirvieron de insumo para dar respuesta a esta pregunta. En el dialogo realizado entre los estudiantes se observa que un estudiante manifiesta “en el tanque de acá abajo (señala con el dedo el tanque de radio mayor) avanza 0,18 m cada hora (se refiere a la altura del líquido), pero cuando llegamos a los 2 m, ya de aquí avanzamos cuatro veces más rápido" con esta afirmación se evidencia que los estudiantes reconocen un punto de inflexión en el que cambia la pendiente. [con las acciones materiales realizadas, se podría pensar que están en una AM4]</p>	

Tabla 14: Respuestas y análisis - Tarea 3, Grado décimo, tanque B

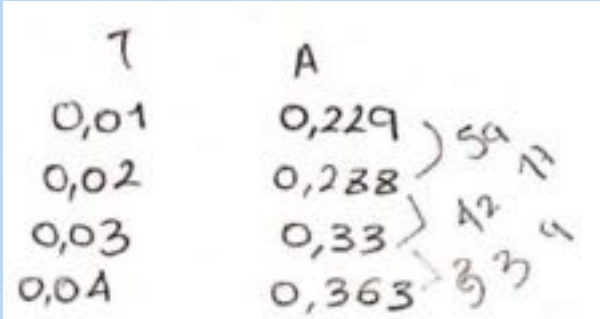
	PREGUNTA	GRADO DÉCIMO	
		G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)

		PREGUNTA	GRADO DÉCIMO	
			G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
TANQUE B	1	En El <b>tanque B</b> , <b>¿Qué es lo que cambia?</b> Justifique su respuesta	El tiempo y los metros cúbicos ( $m^3$ ) del líquido inflamable que contiene el tanque y la parte de abajo está en forma de cono y no de cilindro.	La altura de líquido del tanque según el tiempo, entre más tiempo esté llenando pues va a estar subiendo la altura del líquido en el tanque.
		<b>Análisis pregunta 1</b>	<p>Los estudiantes manifestaron que lo que cambia principalmente en la situación, era el tiempo y la cantidad en metros cúbicos de líquido. También reconocieron que las formas de los tanques cambian y por ende cambiaban las alturas y tiempos de llenado.</p> <p>La revisar la grabación de la institución B, se aprecia que, inicialmente mueven el deslizador para ver qué es lo que cambia, luego lo animan. En el dialogo realizado se aprecia que un estudiante de dice a su compañero “cambia la altura del líquido inflamable dentro del tanque B, [...] según el tiempo, entre más tiempo se esté llenado pues va a estar subiendo la altura del líquido" poniendo en manifesto las AM1 y AM2</p>	

PREGUNTA		GRADO DÉCIMO	
		G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
2	Describan ¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?	Como la parte inferior es en forma de cono, por lo tanto, al inicio de este el tanque se llena más rápido y cada vez que la altura en el cono se vuelve más lento, hasta que llega al cilindro donde ya es constante	Cambia la rapidez de llenado, en el cono se demora más el líquido a medida que va subiendo, en cambio en el cilindro la velocidad de llenado es constante.
	Análisis pregunta 2	<p>Las respuestas de los participantes de la institución A, estaban enfocadas a la manifestación de forma verbal y descriptiva la manera en que iba cambiando la altura en el tanque, reconociendo que crecía más rápido en la parte inicial del tanque en forma de cono y más lento a la medida en que se iba ampliando el radio. También reconocieron que cuando se llegaba al cilindro la altura crecía de forma constante.</p> <p>Se observó que para el análisis de llenado del tanque B los estudiantes observaron de manera ordenada [aparentemente se había presentado un aprendizaje sobre como observar patrones de comportamiento]. Cuando Andrés manifiesta que "cada vez que va aumentando la altura, necesita más tiempo para llenarse" está aludiendo al cono y como su forma afecta el comportamiento creciente de la altura. Lo anterior fue apoyado por la acción material de movilizar el deslizador con el cursor, observando cuanto cambiaba la altura al cambiar una unidad en el tiempo. AM 3 y AM4</p> <p>Institución B</p> <p>- animan el deslizador para visualizar de una manera semejante a la realidad como cambiaba la altura del líquido. Los estudiantes reconocen que los tiempos de llenado en cada una de las formas son diferentes, además, identifican que la rapidez de llenado en cono va disminuyendo a medida que la altura del líquido crece [AM2]. Para justificar este fenómeno, Jonatan se dice a su compañero "invéntese ahí dos triángulos, uno hacia aquí y el otro hacia acá, [señala, con el dedo, al cono formado</p>	

PREGUNTA		GRADO DÉCIMO	
		G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
3		<p>dos triángulos, de tal manera que, desde una vista frontal, se completara un cilindro], le está quitando eso". En este caso, la simulación favorece la visualización 3D para completar el cilindro, a partir del cono, lo que les permite dar una explicación lógica y modificar sus estructuras mentales.</p> <p>- Jonatan: "al comienzo como no tiene espacio llena más rápido (...) como es un cono, el líquido se va demorando más cada vez que va subiendo, hasta que llega al cilindro que es totalmente parejo, entonces, se llena a una velocidad constante" [AM2]</p>	
	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo	<p>VER IMAGEN G2-S3-TB-3-VERYAND 10</p>  <p>Imagen 23: Respuestas – tarea 3 - p3-inst_A - G10 – tanque B</p>	 <p>Imagen 24: Respuestas - tarea 3 - p3-inst_B - G10 – tanque B</p>

PREGUNTA		GRADO DÉCIMO	
		G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
	Análisis pregunta 3	<p>Cuando Andrés expresa "En este punto es cuando está en el cono [haciendo referencia a la primera forma del tanque] como vemos al principio va aumentando más rápido a medida que el tiempo pasa, pero luego como que la altura se empieza a volver más lenta, entonces empieza rápido y luego como que se normaliza y cuando llega a este punto [señalando el punto de cambio de forma] es cuando llega al cilindro y ahí se vuelve constante" AM1, AM2, AM2*, AM2**, AM3 y AM5</p> <p>Institución B</p> <p>Para realizar la gráfica los estudiantes registran los valores de la altura de llenado para cada uno de los tiempos en lápiz y papel, es de aclarar que los registra de manera desorganizada (no los registran en tabla). Usaron la calculadora, para saber cuánto subía el volumen cada vez que cambiaban el tiempo. Para ello, hallaron las diferencias entre la altura del líquido obtenida en un tiempo, con la altura obtenida en el tiempo inmediatamente anterior. de esta manera cuantifica los cambios en cada una de las variables, evidenciando una AM3. Esta acción mental se corrobora en la entrevista cuando se les pregunta ¿cómo hicieron para tener estos valores?, a lo que responden “supimos cuánto se llenaba en una hora, supimos lo que llenaba en dos horas, le reste lo que llenaba en una hora a las dos horas, y me dio esto (señala la hoja en donde habían hecho los cálculos) ósea que esto lo que llena de más en dos horas, (...) ahora, lo que lleno en dos horas se lo resto a lo que llenaron en tres horas para saber que lleno de más"</p> <p>En el proceso de realizar la gráfica, ubicaron las parejas ordenadas de puntos, del tiempo con la respectiva altura del líquido y trazaron los segmentos de recta secantes entre cada par consecutivo de puntos. Evidenciando una AM4.</p>	

PREGUNTA		GRADO DÉCIMO	
		G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
4	<p>Podrían establecer una manera para especificar</p> <p><b>¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo? ¿Qué datos requieres para ello?</b></p>	<p>En el cono la altura cada vez va a aumentar más lento y ya en el cilindro esta se vuelve constante, y se requiere tomar la altura del líquido en diferentes intervalos</p> <p>VER IMAGEN G2- S3-TB-4- VERYAND 10</p> 	<p>Una manera para especificar cuanto cambia la altura con el tiempo, requerimos datos como la altura de llenado en metros y el tiempo en horas, para así ir llenando una hora y poder saber cuánto llenó en metros de altura, ir mirando cuanto va subiendo la altura según las horas y restar la hora de llenado siguiente con la anterior para poder saber cuánto hay de diferencia de llenado entre cada hora.</p>
	<p><b>Análisis pregunta 4</b></p>	<p>En la institución A, en la respuesta brindada por Verónica "Tomamos medidas y nos dimos cuenta que lo que decíamos era verdadero, que entre más arriba estaba más lento". Revisando el video se encontró que dentro de las acciones materiales realizadas por la pareja de estudiantes ellos realizaron incrementos uniformes e iban anotando los valores en una tabla [tecnología de lápiz y papel] y calcularon diferencias y a su vez diferencias entre las diferencias buscando patrones de regularidad; así mismo, usaron calculadora y comprobaron ciertas hipótesis usando la información que GeoGebra les arrojaba. Estamos en presencia de AM2**</p> <p>En el siguiente fragmento es de interés:</p> <p>VERÓNICA: "por ejemplo acá [gráfica] hay de diferencia era 17 en estos 9 y pues así debe ser menor"</p> <p>ANDRÉS: "entonces pues cada vez que poníamos un nuevo dato la diferencia que se veía, no se veía como un patrón y siempre era diferente, entonces como que no podíamos predecir..."</p> <p>Frente a estas acciones se dan muestras de un fuerte razonamiento covariacional que al parecer fue</p>	

PREGUNTA		GRADO DÉCIMO	
		G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
5		<p>afectado por el medio en el cual se estaba realizando (lápiz y papel), pues a pesar de que los estudiantes registraron sus datos a partir de la exploración con el programa, hallaron las diferencias con la calculadora y al buscar las diferencias de las diferencias y al no tener buena cantidad de datos registrados, abandonaron la tarea. Frente a esto queda como posibilidad para futuros estudios disponer de una tabla dinámica en la que se muestren las diferencias y los estudiantes sigan ese proceso de conjeturación.</p> <p>Dentro de las acciones materiales evidenciadas están:</p> <p>reiniciar el deslizador o el experimento, controlar y contar los saltos con el cursor, comparar valores de entre magnitudes y estimar diferencias entre los valores cambiantes en una misma magnitud.</p> <p>Institución B</p> <p>haciendo uso de las acciones materiales realizadas en el punto anterior, dan respuesta a la pregunta describiendo lo que realizaron en el punto anterior. Un aspecto a resaltar es que a pesar de que los estudiantes coordinaron los cambios en las variables, tomaron cambios uniformes en el tiempo y tomaron cambios más refinados en la variable independiente, no hallaron la razón entre dichos cambios, este hecho les dificultó llegar a una AM5.</p>	
	¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?	0,004m <sup>3</sup> /0,01 s. = cilindro	Es posible porque tenemos una figura en 3D que nos muestra cómo cambia, la rapidez la podemos saber exactamente utilizando el método mencionado en la pregunta anterior.

PREGUNTA		GRADO DÉCIMO	
		G2. DÉCIMO (INSTITUCIÓN A)	G4. DÉCIMO (INSTITUCIÓN B)
	Análisis pregunta 5	<p>Los estudiantes verificaron valores simultáneos entre variables y establecieron una razón específica a través de la información de GeoGebra. Sin embargo, es necesario reportar que dicho avance se dió en gran parte por la materialización de ciertas acciones. Entre ellas:</p> <p>-La acción material de mover deslizador de manera ordenada, permitió reconocer cantidad de cambio AM3 y establecer la razón de cambio promedio por unidad de tiempo AM4 lo anterior en relación a los tanques en forma cilíndrica.</p> <p>- En el tanque en forma de cono, se les dificultó establecer razones de cambio cuantitativas pues no podían hallar valores específicos a pesar de reconocer la naturaleza [cualitativa] del cambio presentado en el fenómeno. Sin embargo, en alguna medida hay indicios de AM2** puesto que utiliza cambios coordinados y cuantificados en una variable, pero solo le sirve para describir de manera cualitativa el cambio aludido a dirección. Lo anterior se hace visible en “podríamos tomar uno a uno [refiriéndose al tiempo] y ver como es el comportamiento" los estudiantes hicieron una pseudo tabla y encontraron que cada vez se va disminuyendo más el crecimiento en la altura del cono.</p> <p>Institución B</p> <p>Con la respuesta dada en el cuestionario, se infiere que los estudiantes insinúan de una manera muy sutil un principio de la AM5, [deducimos que los estudiantes se refieren a repetir el proceso de la pregunta cuatro de manera más refinada]</p>	



## 4.2 Resultados

A partir del análisis y rastreo realizado se encuentran dos acciones mentales intermedias y adicionales a las propuestas por Carlson et al. (2003) que fueron movilizadas por el uso de la TD. En ese sentido, a partir de las AMtI este trabajo constituye una ampliación al marco teórico en mención y debido a esto, se propone a partir de las evidencias y el trabajo investigativo, usar el término AMI para referirse a las *acciones mentales instrumentadas* entendiendo éstas como las actividades mentales, físicas, asociaciones, movimientos, comparaciones y descripciones de comportamientos que dan cuenta del razonamiento covariacional, movilizadas al abordar tareas por medio de la tecnología digital.

### 4.2.1 Acciones mentales intermedias

*Acción mental instrumentada - intermedia [AM 2\*]: Coordinar los cambios de la variable independiente para identificar los máximos o mínimos del comportamiento en la segunda variable.* Esta acción se encuentra entre las AM 2 y AM 3 debido a que se coordinan los cambios en la dirección presentados en una variable, para identificar máximos o mínimos.

*Ejemplo: antes de que la medida del lado del recorte fuera 4.9 cm el volumen de la caja aumentaba (...) desde que el recorte comenzaba en 0.1 hasta 4.9 iba creciendo, pero luego desde 4.9 cm, al tener más el recorte, iba decreciendo el volumen.*

*Acción mental instrumentada - intermedia [AM 2 \*\*]: Coordinar la cantidad de cambio en la variable de entrada con los cambios de dirección en la otra variable.* Esta acción se encuentra entre las AM 2 y AM 3 debido a que se manifiestan la cantidad de cambio con la dirección de cambio en la segunda variable.

Ejemplo: “si hacemos un recorte primero en 1 cm, pero luego saltamos y hacemos un recorte en 2 cm con la troqueladora (...) esto afectará el largo y el volumen de la caja, haciéndola muy larga o muy baja” ó “dependiendo de cómo cambia  $x$  cambia todo... se puede ver en la gráfica como por ejemplo el volumen sube y baja es como una parábola”, manifestando así una acción mental intermedia entre AM2 y AM3.

#### 4.2.2 Tabla de resumen de presencia de acciones mentales

Como el propósito general consistía en rastrear las acciones mentales se planteó la siguiente tabla resumen, en la cual se registra la cantidad total de parejas (4) con relación al alcance de acciones mentales por pregunta realizada en las tres tareas propuestas. Se encuentra el número de parejas que alcanzó la acción mental y el respectivo porcentaje frente al total. Cabe aclarar, que las tareas planteadas fueron pensadas teniendo en cuenta el nivel de escolaridad de los estudiantes participantes, por tanto, no se pensó en que fueran enfocadas hacia la AM5.

Tabla 15: Resumen AM “Industria alimenticia”

<b>TABLA RESUMEN DE PRESENCIA DE ACCIONES MENTALES</b> <b>[El número corresponde a la cantidad de parejas en las que se evidenció la acción mental específica]</b>								
TAREA	PREGUNTA	AM1	AM2	AM2*	AM2**	AM3	AM4	AM5
TAREA 1 "INDUSTRIA ALIMENTICIA"	1	4 100%	4 100%					
	2	4 75%	3 75%					
	3	4 100%	3 75%	2 50%	1 25%	3 75%	0 0%	
	4	1 25%	2 50%	1 25%	2 50%	1 25%	0 0%	
	5	1 25%	3 75%	2 50%	1 25%	4 100%	1 25%	

6	1 25%	1 25%	1 25%	0 0%	3 75%	1 25%	1 25%
7 n/a	1 25%	1 25%	1 25%	0 0%	1 25%	3 75%	0 0%
8 n/a							

Tabla 16. Resumen AM "El cliente cansón"

TAREA	PREGUNTA	AM1	AM2	AM2*	AM2**	AM3	AM4	AM5
TAREA 2 "CLIENTE CANSÓN"	1A	1 25%	1 25%	0 0%	3 75%	2 50%		
	1B	0 0%	0 0%	0 0%	2 50%	1 25%		
	2A	2 50%	3 75%	0 0%	1 25%	4 100%		
	2B	2 50%	1 25%	0 0%	2 50%	4 100%		
	3A	1 25%	1 25%	0 0%	1 25%	3 75%		
	3B	2 50%	2 50%	0 0%	1 25%	1 25%		
	4 N/A	3 75%	3 75%	0 0%	0 0%	3 75%	1 25%	

Tabla 17 Resumen AM "Central de Servicios"

TAREA	PREGUNTA	AM1	AM2	AM2*	AM2**	AM3	AM4	AM5
TAREA 3 "CENTRAL DE SERVICIOS" TANQUE A	1	3 75%	2 50%	0 0%	0 0%	1 25%		
	2	1 25%	1 25%	0 0%	0 0%	4 100%	1 25%	
	3	1 25%	2 50%	0 0%	0 0%	3 75%	2 50%	
	4	1 25%	4 100%	0 0%	0 0%	3 75%	3 75%	

TAREA	PREGUNTA	AM1	AM2	AM2*	AM2**	AM3	AM4	AM5
	5	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	1 25%	4 100%	
TAREA 3 "CENTRAL DE SERVICIOS" TANQUE B	1	3 75%	2 50%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%
	2	1 25%	2 50%	0 0%	0 0%	3 75%	1 25%	0 0%
	3	1 25%	2 50%	1 25%	1 25%	2 50%	2 50%	0 0%
	4	0 0%	0 0%	0 0%	1 25%	1 25%	0 0%	1 25%
	5	0 0%	0 0%	0 0%	1 25%	0 0%	1 25%	1 25%

En las tablas 15, 16 y 17 se encuentra de manera global el registro del rastreo de las acciones mentales, de la cual se puede decir que se lograron evidenciar todas a pesar de no incluirse en el diseño tareas para la acción mental 5.

#### 4.2.3 Acciones mentales instrumentadas. AMI

A partir de lo anterior, la ampliación al marco teórico que se propone en esta investigación es la siguiente:

Tabla 18: Acciones mentales instrumentadas asociadas al razonamiento covariacional

Acción mental instrumentada	Descripción de la acción mental instrumentada	Comportamiento
AMI 1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Movilizar el deslizador para identificar cambios globales. Verbalización de la relación de dependencia entre variables y coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambio en x).

<b>Acción mental instrumentada</b>	<b>Descripción de la acción mental instrumentada</b>	<b>Comportamiento</b>
AMI 2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con cambios en la otra variable.	<p>Construcción de una línea recta creciente.</p> <p>Movilizar el deslizador para identificar la dirección del cambio. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio de valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada (e.g. mientras x aumenta y disminuye).</p> <p>Reconocer que la dirección del cambio en una de las variables, en puntos o intervalos específicos, depende de la dirección de cambio en la otra variable.</p> <p>Reconocer que existen situaciones en la que en cierto intervalo no hay cambios en la variable dependiente, por tanto, no hay dirección de cambio en dicha variable para ese intervalo.</p>
AMI 3	Coordinación de los cambios de la variable independiente con los máximos o mínimos del comportamiento en la segunda variable	<p>Movilizar el deslizador para identificar la dirección del cambio reconociendo cuando llega a un máximo o a un mínimo. Verbalización de la consciencia de los cambios en la variable independiente mientras identifica los máximos o mínimos (e.g. desde que el recorte comienza en 0.1 hasta 4.9 va creciendo el volumen, pero luego, desde 4.9, al tener más el recorte, decrece el volumen).</p> <p>Reconocer que la dirección de cambio no es siempre la misma. Esto implica que reconozca la existencia de puntos en donde la dirección de cambio se invierte.</p>
AMI 4	Coordinación de la cantidad de cambio en la variable de entrada con los cambios de dirección en la otra variable.	<p>Movilizar el deslizador para identificar valores exactos de cambio, que implican modificación en la dirección de la otra variable. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada. (e.g. dependiendo de cómo cambia x, cambia todo, se puede ver como primero el volumen aumenta y luego disminuye).</p> <p>Reconocer que cambios particulares en una de las variables implican una dirección de cambio en la otra variable (en caso de que el cambio exista).</p>

<b>Acción mental instrumentada</b>	<b>Descripción de la acción mental instrumentada</b>	<b>Comportamiento</b>
AMI 5	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra variable.	<p>Movilizar el deslizador para encontrar la cantidad de cambio en las variables. Localización de puntos/construcción de rectas secantes.</p> <p>Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada. (e.g. si <math>x</math> aumenta 1, entonces el volumen aumenta 19).</p> <p>Reconocer que para cada valor de la variable; dependiendo del valor en el cual inicia el cambio en la variable independiente, se puede tener un cambio distinto en la variable dependiente.</p>
AMI 6	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio de la variable de entrada.	<p>Movilizar el deslizador para encontrar los valores extremos, para luego, calcular la razón de cambio promedio. (e.g. la altura del líquido en el tanque crece a una razón de 0,18m cada hora)</p> <p>Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran los incrementos uniformes del valor de entrada.</p>
AMI 7	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	<p>Movilizar el deslizador para encontrar la razón de cambio instantánea. Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad.</p> <p>Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos). (e.g. para cada punto de la gráfica de la función se tiene una recta tangente de pendiente diferente).</p>

## 5 CAPÍTULO CINCO: CONCLUSIONES

En este apartado se presentan las conclusiones de la investigación realizada, en términos del objetivo general y específicos.

### 5.1 General

A partir del objetivo general de rastrear las acciones mentales realizadas por estudiantes de grado 9° y 10° que dan cuenta del razonamiento covariacional, que surgen al momento de resolver problemas simulados con tecnología digital; podemos decir que efectivamente logramos identificar que estudiantes de secundaria específicamente de grados 9° y 10° desarrollan las acciones mentales propuestas por Carlson et al. (2003) aún sin haber recibido cursos de cálculo. Al mismo tiempo, podemos afirmar que dichas acciones mentales se vieron potencializadas en cuanto a su desarrollo, por el uso de herramientas instrumentadas presentes en el programa GeoGebra como es el caso del deslizador y la interacción con el usuario. Justamente del análisis de este último elemento asociado al razonamiento covariacional, es que emergen dos acciones mentales instrumentadas que fueron movilizadas por el uso de TD, lo cual propone ampliar el marco teórico propuesto por Carlson et al. (2003).

### 5.2 Específicas

- La herramienta deslizador fue el foco de interés de los participantes, pues todas sus acciones materiales estaban ligadas al manejo de este. Dicha herramienta sumada a la interacción con los usuarios permitió establecer las AMI.

- El uso del deslizador fue necesario para coordinar el valor de una variable con los cambios de la otra, la dirección de cambio y la cantidad de cambio.
- Cuando los estudiantes requerían reconocer cambios a nivel general usaban el movimiento del deslizador haciendo uso del mouse (análisis global), y cuando requerían realizar movimientos más refinados y puntuales (análisis local) para lograr controlar el cambio usaban el teclado alfanumérico (cursor- flechas).
- La TD posibilitó establecer la distancia entre dos valores distintos de las variables; lo cual para conjuntos continuos es particularmente interesante porque supone que estas cantidades de cambio no siempre son enteras, más aún, pueden ser naturaleza irracional o incluso infinitamente pequeñas. En síntesis, el software permitió a los estudiantes explorar cantidades de cambio cada vez más pequeñas en una de las variables.
- A partir del análisis y rastreo realizado se encontraron dos acciones mentales intermedias y adicionales a las propuestas por Carlson et al. (2003) que fueron movilizadas por el uso de la TD. Partiendo de las AMtI emergen las acciones mentales instrumentadas que dan cuenta del razonamiento covariacional cuando se abordan situaciones por medio de la tecnología digital. Estas son:
  - *Acción mental instrumentada - intermedia [AM 2\*]: Coordinar los cambios de la variable independiente para identificar los máximos o mínimos del comportamiento en la segunda variable.* Esta acción se encuentra entre las AM 2 y AM 3 debido a que se coordinan los cambios en la dirección presentados en una variable, para identificar máximos o mínimos. *Ejemplo: antes de que la medida del lado del recorte fuera 4.9 cm el volumen de la caja aumentaba (...) desde que*



*el recorte comenzaba en 0.1 hasta 4.9 iba creciendo, pero luego desde 4.9 cm, al tener más el recorte, iba decreciendo el volumen.*

- *Acción mental instrumentada - intermedia [AM 2 \*\*]: Coordinar la cantidad de cambio en la variable de entrada con los cambios de dirección en la otra variable. Esta acción se encuentra entre las AM 2 y AM 3 debido a que se manifiestan la cantidad de cambio con la dirección de cambio en la segunda variable. Ejemplo: “si hacemos un recorte primero en 1 cm, pero luego saltamos y hacemos un recorte en 2 cm con la troqueladora (...) esto afectará el largo y el volumen de la caja, haciéndola muy larga o muy baja” ó “dependiendo de cómo cambia x cambia todo... se puede ver en la gráfica como por ejemplo el volumen sube y baja es como una parábola”.*
- A partir del rastreo se propone el siguiente marco conceptual en ampliación al propuesto por Carlson et al. (2003):

<b>Acción mental instrumentada</b>	<b>Descripción de la acción mental instrumentada</b>	<b>Comportamiento</b>
AMI 1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Movilizar el deslizador para identificar cambios globales. Verbalización de la relación de dependencia entre variables y coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambio en x).
AMI 2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente.  Movilizar el deslizador para identificar la dirección del cambio. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio de valor de salida mientras se consideran los cambios en

Acción mental instrumentada	Descripción de la acción mental instrumentada	Comportamiento
		el valor de entrada (e.g. mientras x aumenta y disminuye)
AMI 3	Coordinación de los cambios de la variable independiente con los máximos o mínimos del comportamiento en la segunda variable	Movilizar el deslizador para identificar la dirección del cambio reconociendo cuando llega a un máximo o a un mínimo. Verbalización de la consciencia de los cambios en la variable independiente mientras identifica los máximos o mínimos (e.g. desde que el recorte comienza en 0.1 hasta 4.9 va creciendo el volumen, pero luego, desde 4.9, al tener más el recorte, decrece el volumen)
AMI 4	Coordinación de la cantidad de cambio en la variable de entrada con los cambios de dirección en la otra variable.	Movilizar el deslizador para identificar valores exactos de cambio, que implican modificación en la dirección de la otra variable. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada. (e.g. dependiendo de cómo cambia x, cambia todo, se puede ver como primero el volumen aumenta y luego disminuye)
AMI 5	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra variable.	<p>Movilizar el deslizador para encontrar la cantidad de cambio en las variables. Localización de puntos/construcción de rectas secantes.</p> <p>Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada. (e.g. si x aumenta 1, entonces el volumen aumenta 19)</p>
AMI 6	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función	Movilizar el deslizador para encontrar los valores extremos, para luego, calcular la razón

<b>Acción mental instrumentada</b>	<b>Descripción de la acción mental instrumentada</b>	<b>Comportamiento</b>
	con los incrementos uniformes del cambio de la variable de entrada.	<p>de cambio promedio. (e.g. la altura del líquido en el tanque crece a una razón de 0,18m cada hora)</p> <p>Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran los incrementos uniformes del valor de entrada.</p>
AMI 7	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	<p>Movilizar el deslizador para encontrar la razón de cambio instantánea. Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad.</p> <p>Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos). (e.g. para cada punto de la gráfica de la función se tiene una recta tangente de pendiente diferente).</p>

- El carácter dinámico, instantáneo y atemporal de las tecnologías digitales permite al sujeto resolutor plantear hipótesis y comprobarlas de manera inmediata y devolverse cuantas veces sea necesario.
- Se hacen evidentes los procesos de instrumentación e instrumentalización en los estudiantes, pues en la medida en que se apropiaban del problema, también se familiarizaban con el manejo del software. Existió génesis instrumental.

- El uso de calculadora permitió a los estudiantes comprobar los resultados que brindaba el software, conjeturar y comprobar hipótesis.
- El uso de TD permitió disminuir las brechas sociales que comúnmente se presentan entre instituciones de carácter público y privado, pues los estudiantes participantes de la investigación no fueron seleccionados por sus habilidades matemáticas si no por sus habilidades discursivas. Se evidenció que mostraron avances similares en su razonamiento covariacional a pesar de no tener las mismas posibilidades frente al manejo de la tecnología.
- El contexto pseudoreal en el que se presentaron las tareas llevó a los estudiantes a contemplar más variables, entre ellas preguntas como ¿para qué se realizaría la tarea? ¿el material?
- Se evidenció en todos los casos que un estudiante de cada pareja era el que jugaba el rol de dar manejo al software [seguía instrucciones y pautas de la tarea, planteaba hipótesis y exploraba] mientras el otro estudiante como observador y participante activo validaba, conjeturaba, y proponía estrategias y acciones específicas [siempre existiendo comunicación]. En este sentido, existe una gran riqueza en el trabajo colaborativo, sobre el cual estamos de acuerdo con Maldonado (2007) quién expresa que este permite que los estudiantes construyan juntos, conjuguen esfuerzos, talentos y competencias que les permiten lograr metas establecidas consensuadamente, también amplía las posibilidades de justificación y argumentación de los estudiantes.
- El uso de TD puede generar obstáculos en preguntas como ¿Qué cambia? Pues los estudiantes se pueden centrar únicamente en la forma de la vista gráfica haciendo descripciones válidas pero superfluas que no tienen en cuenta el fenómeno de la

variación. Ej., el bosquejo de la gráfica situación ... en la cual los estudiantes se quedaron con la imagen mental de gráfica como la visual de la pantalla.

- La simulación de las tareas en GeoGebra y en general la presencia de varios sistemas de representación en simultánea, permitió a los estudiantes reconocer los intervalos en los cuales la variable cambia más o menos rápido.
- Una pareja de grado noveno realizó un cambio de tecnología, movilizándose al uso de lápiz y papel y planteamiento de tablas, en las cuales buscaron patrones de comportamiento en las “diferencias” y a partir de allí reconocieron que el comportamiento de la función no siempre es constante, dando muestras de AM3 y aplicando una AMtI de movilizar el deslizador con el teclado alfanumérico- flechas para verificar sus hipótesis.
- La herramienta animación permitió a una pareja de estudiantes de grado décimo identificar los intervalos de cambio mayores o menores, dado que, a partir de la visualización reconocieron ciertos “espacios” entre los puntos registrados por el programa. Lo anterior los condujo a deducir que existían diferentes intervalos de crecimiento o decrecimiento.
- Encontramos que se evidencia uno de los resultados reportados en García (2009), cuando los estudiantes no están familiarizados con el uso del programa, recurren al lápiz y al papel para intentar reproducir y justificar lo que están trabajando. En las tareas presentadas, los estudiantes recurrieron al uso del lápiz y el papel cuando no entendían la tabla dinámica o simplemente para validar y organizar la información que les brindaba el programa.

### 5.3 Recomendaciones para futuros estudios

- El presente trabajo abre las puertas para seguir indagando sobre el marco teórico del RC y sobre las AMI que se pueden potenciar haciendo uso de TD.
- Se hace evidente que es necesario pensar en actividades para observar la AM 5 y o la AMI 7 y así seguir ampliando el marco teórico.
- Frente a estas acciones se dan muestras de un fuerte razonamiento covariacional que al parecer fue afectado por el medio en el cual se estaba realizando (lápiz y papel), pues a pesar de que los estudiantes registraron sus datos a partir de la exploración con el programa, hallaron las diferencias con la calculadora y al buscar las diferencias entre las diferencias y al no tener buena cantidad de datos registrados, abandonaron la tarea. Frente a esto queda como posibilidad para futuros estudios disponer de una tabla dinámica en la que se muestren las diferencias y los estudiantes sigan ese proceso de conjeturación.
- Un futuro estudio podría basarse en someter a juicio de la comunidad académica las categorías construidas en el presente trabajo, analizando ¿qué ocurre con las acciones mentales instrumentadas cuando se cambia de herramienta? De igual forma se podría analizar, si los estudiantes que han tenido acercamientos tempranos al RC con TD pueden o no aumentar su competencia frente a la comprensión de la razón de cambio y en consecuencia aportar a la comprensión de los objetos matemáticos abordados en los cursos de cálculo.

## 6 REFERENCIAS

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a Reflection about instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245 - 274.
- Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. . En Mancera E. y Pérez C. (Eds.) *Memorias de la XII Interamericana de Educación Matemática 12*, 9 - 21.
- Avila, P. (2011). Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la Variación lineal y cuadrática. *Tesis de Maestría*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Cabero, A. (2010). Los retos de la integración de las TICs en los procesos educativos. Límites y posibilidades. *Perspectiva Educacional, Formación de Profesores.*, 9(1), 32 - 61.
- Carlson, M. (1998). A Cross - Sectional Investigation of the Developmet of the Function Concept. *CBMS Insues in Mathematics Education*, 7, 114 - 162.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (5 ), 352 - 378.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco de referencia y un estudio. *Revista EMA*, 8 (2), 121-156.

- Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa.*, 7(3), 195 - 218.
- Drijvers et al. (2010). Integrating Technology Into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. *The 17th ICMI Study*, 89-132.
- Fiallo, J. y Parada, S. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista Científica.*, 56 - 71.
- Fiallo, J. y Parada, S. (2018). *Estudio Dinámico del cambio y la Variación, curso de precálculo mediado por GeoGebra*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- Forero, C. y López, D. (2012). Un aproximación al concepto de razón de cambio con estudiantes de grado sexto a partir de la mediación con geometría dinámica. *Tesis de Especialización*. Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional.
- Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11-14.
- García M, J. J. (2016). Desarrollo del razonamiento covariacional, en la conceptualización de la función lineal a través de software interactivo. *Tesis de Maestría*. Medellín: Universidad de Medellín.
- García, M. (2009). Construcción del concepto de variación con apoyo de una herramienta computacional.



- Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática educativa. UNIANDES - LIDIE*, 93-111.
- Gómez, P. y Carulla, C. (1998). De lo simbólico a lo gráfico. Efectos de la tecnología en la educación matemática. *Universidad de los Andes*, 1-17.
- Gómez, P. y Velazco, C. (2017). Complejidad y coherencia de documentos curriculares colombianos: Derechos Básicos de Aprendizaje y Mallas de Aprendizaje. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 259-279.
- Grueso, R. y González, G. (2016). El concepto de función como covariación en la escuela. *Tesis de Maestría*. Santiago de Calí: Universidad del Valle.
- Ímaz, C. y Moreno, L. (2014). *Cálculo: su evolución y enseñanza* (Vol. 2a ed.). México, D.F.: Trillas.
- Jiménez, R., Moreno, A., Rodríguez, N. y Niño, L. (2015). Propuesta de enseñanza para grado once, introducción al concepto de derivada. *RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 658 - 663.
- Jonhson, H. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Bahavior*, 31, 313 - 330.
- Leon, C. (2017). El pensamiento covariacional y GeoGebra:herramientas para la explicación científica de algunas realidades. *Tecné, Episteme y Didaxis, TED* (42), 159-171.
- Maldonado, M. (2007). El trabajo colaborativo en el aula universitaria. *Laurus*, 13(23), 263 - 278.


- MEN. (2004). Pensamiento variacional y tecnologías computacionales. Bogotá: Enlace Editores Ltda.
- Mena, C. (2014). La transformación de funciones desde un enfoque covariacional. *Tesis de Maestría*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Mendoza, Ferrari y Méndez. (2017). Estudio de funciones desde la perspectiva de modelación y covariación. *Tlamati Sabiduría*, 2 (8).
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares. Área de Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*. Bogotá, D.C.: MEN, Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio.
- Montero, J. y Parada, G. (2016). *Propuesta para desarrollar el pensamiento variacional en la modalidad B-learning (trabajo de grado Licenciatura en Matemáticas)*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1994). Estandares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. *Edición en castellano*, Sociedad Andaluza de Educación matemática (Thales).

- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos (Traducción: Martin Acosta)*. Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander (Trabajo original publicado en 1995) .
- Saldanha & Thompson. (1998). Re- thinking covariation from a quantitative perspective: simultaneous continuous variation. *Proceedings of the Twentieth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PMA* (págs. 298 - 306). North Carolina, USA: North Carolina State University.
- Torres, J. y Mejía, H. (2015). Un acercamiento dinámico al concepto de función a través del estudio de fenómenos de variación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 527- 536). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa - Clame.
- Triana, J., Guacaneme, E., Navarro, N., Orozco, J., Paloma, A., López, M. y Stepanian, V . (2014). Experiencia de covariación a partir del recubrimiento de superficies. *Encuentro Distrital de Educación Matemática, EDEM 1* (págs. 350-356). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Trouche, L. (2005). An Instrumental Approach to Mathematics Learning in Symbolic Calculator Environments. In: Guin D., Ruthven K., Trouche L. (eds) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. 36, págs. 137 - 162. Springer, Boston, MA.
- Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas (8-10 May 2002)*. Bogotá.
- Villa Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), 9-25.
- Vinner, S. (1997). The Pseudo-conceptual and the Pseudo-Analytical Thought Processes in Mathematics Learning. *Educational Studies in Mathematics*(34), 97 - 129.

## 7 ANEXOS

### 7.1 Anexos grado 9° - Institución Privada- tareas 1, 2 y 3



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**  
*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
*Maestría en Docencia de la Matemática*  
Luis Castro - Carlos Forero

---

Nombres: Vigilante, Herrería, Costa Romero Grado: 9°B Fecha: 17-06-19

**Situación 1. Industria alimenticia**

Ustedes son una pareja de ingenieros encargados de la fabricación de recipientes metálicos usados en la industria alimenticia. Como ingenieros tienen la tarea de diseñar este recipiente atendiendo a las especificaciones del cliente y garantizando el mejor uso de las materias primas disponibles; esto significa que maximizan los recursos en la pieza.

**Especificaciones del cliente:**  
El cliente ha pedido que el recipiente tenga forma rectangular, sin tapa, y esté fabricado a partir de una lámina de metal resistente a la oxidación y cuya capacidad de almacenamiento sea la mayor posible.  
Para la elaboración de la caja sin tapa se cuenta con láminas rectangulares de acero de medidas 25cm × 35cm. Cuentan con una máquina troqueladora que retira piezas cuadradas de las esquinas de la lámina y otra máquina llamada dobladora que recibe la pieza troquelada para doblar las caras y así formar la caja.  
En el archivo de GeoGebra se presenta una simulación de la situación. En ella se ven 4 espacios cuadrados en las esquinas de la lámina, esos cuadrados han sido retirados por la troqueladora.

Se establece que  $x$  corresponde a la medida del lado del recorte cuadrado que se quita de las esquinas,  $h$  corresponde al fondo de la caja,  $v$  corresponde al volumen de la caja. Llamaremos **salto** ( $\Delta$ ) al valor del cambio de estado, por ejemplo,  $\Delta v$  corresponde al salto del valor del volumen.

A partir de la modelación en GeoGebra responda las siguientes preguntas:

No	Pregunta	Respuesta – justificación
1	En la situación presentada, ¿Qué es lo que cambia?	Cambia el volumen dependiendo la medida del lado del recorte que se quita de las esquinas
2	¿De qué dependen las magnitudes cambiantes?	Del área que se corte con la troqueladora (Esquinas)
3	¿De qué depende el volumen de la caja? Justifique su respuesta.	De la altura, ancho y largo dependiendo de las medidas que se cortan con la troqueladora

Area de lamina  $875 \text{ cm}^2$

Cuando  $V = 0$

$$x = 8,249$$

Area de lamina cortado =  $119 \text{ cm}^2$

$$V = 1875 + 5x$$

$$1871.5507 \text{ f}$$

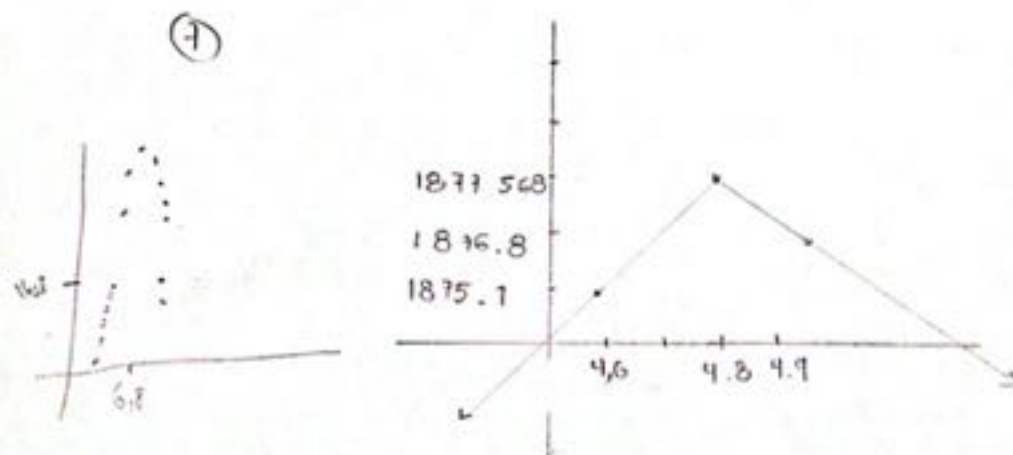
$$1877.568 + 48h \quad 15,47 \quad 25,4 = L$$

4	¿Cómo cambia el volumen y el largo de la caja? Justifique su respuesta.	Justifican con el video de atrás
5	¿Existe un intervalo en el que el volumen crece o decrece más rápido? Si es así, ¿cuál? Justifique su respuesta	Cuando la altura es de 6.8 el volumen es de 1876.8 y cuando la altura es de 7.3 el volumen es de 1848.3
6	¿Para qué valor del recorte se obtiene el máximo volumen?	Para $x = 23.04 \text{ cm}^2$ El $V = 1877.568 \text{ cm}^3$ lado = $4.8 \text{ cm}$
7	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se relaciona el volumen con la medida del recorte de la caja.	
8	¿La exploración con el software les facilitó realizar la tarea? Explique su respuesta	Si, por que que más fácil encontrar datos por medio de modelos 3D, tablas y gráficas

Preguntas para la entrevista de cierre (al finalizar las actividades)

Ustedes como hicieron para saber que cambia en la situación

Si ustedes no hubiesen utilizado tecnología, sus respuestas seguiría siendo la misma



④

	Y	X
	Volumen	Largo
1836 $y_1$	27 $x_1$	
1824.57 $y_2$	27.2 $x_2$	
1811.68	27.4	

-11.43  
-0  
-12.89

$\Delta X = 0.2$   
 $\Delta X = 0.2$

x = largo	y = volumen
26	1872
27	1836
28	1764
29	1653
30	1500
31	1302
32	1056

36  
72  
111  
153  
198  
240

36  
39  
42  
45  
48

$$\Delta X = 1$$

$$y_2 - y_1 = b$$

$$b = 3$$





UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Maestría en Docencia de la Matemática  
Luis Castro - Carlos Forero

Nombres: Vinora Herreria - Cirilo Romero Grado: 96 Fecha: 17-06-19

**Actividad 2 "El cliente cansón"**

Un arquitecto diseñó un tanque de forma cúbica para un cliente. El diseño se hizo con un lado de 2 metros de longitud, obteniendo un tanque con capacidad (volumen) de  $8 \text{ m}^3$ .

1- El arquitecto entregó el diseño al cliente, pero este le solicitó modificarlo de tal manera que el tanque mantuviera su forma cúbica, pero que su capacidad aumentará 2 metros cúbicos, es decir, que ahora tuviera una capacidad de  $10 \text{ m}^3$ .

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

<p>Al ser un cubo todos sus lados deben tener medida igual y para obtener las medidas se debe sacar la raíz cubica de la capacidad que pide el cliente.</p>

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

<p>A cada lado debemos aumentarle <math>0,15443469 \text{ m}^3</math> lo que da una medida de <math>2,15443469 \text{ m}</math></p>

2- El cliente revisó el diseño del tanque y decidió aumentar otros  $2 \text{ m}^3$  al volumen del tanque.

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

<p>Al ser un cubo todos sus lados deben ser iguales y para obtener estas medidas se debe sacar la raíz cubica de la capacidad que pide el cliente.</p>

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

la medida de cada uno de los lados es de
2.289428485 m al ajustarse 0.1349937951 m
a cada lado

3- El cliente había olvidado unos requerimientos de su familia y solicitó al arquitecto aumentar otros  $2\text{m}^3$  al volumen del tanque.

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

En el diseño a cada lado se le aumenta
0.1207137797 para que cada lado mida 2.410142264 m
y tener la capacidad necesaria

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

Cada lado mide 2.410142264 al aumentarle
0.1207137797 a los lados del diseño anterior.

4- El cliente quiere saber en cuánto debe cambiar la medida del lado siempre que se desee aumentar el volumen en  $2\text{m}^3$ . Ayúdalo al arquitecto a elaborar un procedimiento o fórmula. Redacta un párrafo y explícale al cliente el(los) procedimientos que debería realizar para tal petición.

Estimado cliente, recibe de mi parte un cordial saludo...
A continuación encuentra la fórmula para aumentar
a un diseño cualquiera $2\text{m}^3$ de capacidad conservando
la forma cúbica:
$x = \text{Capacidad Original}$ $y = \text{Medida del lado}$
$z = \text{Medida del lado del diseño anterior}$ $F = \text{Ajuste}$
que debe realizarse al
diseño anterior
$\sqrt[3]{V \cdot x} = y \quad y - z = F$



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Maestría en Docencia de la Matemática  
Luis Castro - Carlos Forero

### Actividad 3 "La central de servicios"

Ustedes son los jefes de seguridad industrial de una central de servicios. Uno de sus roles es analizar y pronosticar los cambios que se dan en los tanques de líquidos inflamables, que manejan en dicha entidad y enviar un informe al gerente de la empresa respondiendo ciertas preguntas que desea conocer. Para ayudarles a la comprensión de los fenómenos el gerente les envió una simulación realizada en GeoGebra. Los tanques que deben analizar son el A (compuesto por formas cilíndricas) y el B (compuesto por figuras mixtas). A continuación, la ficha técnica de cada tanque y la simulación en Geogebra a partir de la cual se solicita realizar el informe de gestión.

Ficha técnica	Radio mayor	altura	Radio menor	altura	Razón de llenado
Tanque A:	3m	2m	1.5 m	2m	$3m^3/h$ $3m^3/h$

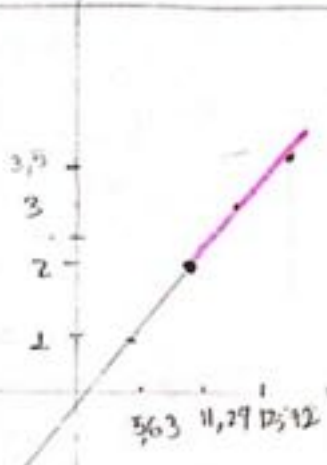
#### INFORME DE GESTIÓN Y ANÁLISIS LA CENTRAL DE SERVICIOS- TANQUE A

NOMBRES: Viana Herrera - Camila Romero

GRADO: 96

FECHA: 17/06/2019

No	Pregunta	Respuesta - justificación
1	En el tanque A, ¿Qué es lo que cambia? Justifiquen su respuesta	La altura del líquido cambia al ser la variable dependiente
2	Describan ¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?	Después de que se llena la primera figura es menor el tiempo necesario, debido a que el volumen de la segunda figura es menor

<p>3 Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo</p>	
<p>4 Podrían establecer una manera para especificar ¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo? ¿Qué datos requieres para ello?</p>	<p>Necesitamos saber la altura que tiene el agua al pasar por una noria y tabular con diferentes tiempos.</p> <p><math>t_j</math> en el respaldo de la hoja</p>
<p>5 ¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?</p>	$\frac{11.3}{2} = 5.65 \text{ m}^3/\text{noria}$



Ficha técnica	Radio mayor	altura	Radio menor	altura	Razón de llenado
Tanque B:	3m	2m	1.5 m	2m	$3m^3/h$

**INFORME DE GESTIÓN Y ANÁLISIS LA CENTRAL DE SERVICIOS TANQUE B**

**NOMBRES:**

**GRADO:** \_\_\_\_\_ **FECHA:** \_\_\_\_\_

No	Pregunta	Respuesta - justificación
1	En el tanque B, ¿Qué es lo que cambia? Justifiquen su respuesta	Cambia la altura del líquido con el paso del tiempo por que y (la altura del líquido) es la variable dependiente
2	Describan ¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?	La segunda figura se demora menos en llenar porque el volumen es menor.
3	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo	
4	Podrían establecer una manera para especificar ¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo? ¿Qué datos requieres para ello?	Suponiendo que el tiempo esta expresado en horas. Por cada hora $\rightarrow$ Aumenta $0,398 m^3$
5	¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?	$\frac{3996}{11.219} = 0,398 m^3/hora$

Tanque A

$$V = \pi r^2 h$$

$$V_1 = 56.59 \text{ m}^3$$

$$V_2 = 14.13 \text{ m}^3$$

$$V = 70.67 \text{ m}^3$$

(4)

$$5.63 = 1 \text{ m}$$

$$11.31 = 2 \text{ m}$$

$$2.72 = 3 \text{ m}$$

Tanque B

$$V = \pi r^2 h$$

3

$$V_1 = 18.84 \text{ m}^3 + 6.28$$

$$V_2 = 14.13 \text{ m}^3 + 9.42$$

$$V = 32.97 \text{ m}^3 + 10.99$$

$$10.24$$

$$9.24$$

$$8.24$$

$$7.24$$

$$3.408$$

$$3.01$$

$$2.612$$

$$2.21$$

$$1.81$$

Cano 2 x 6.7

Cilindro 1.996

2.227

3203705732

## 7.2 Anexos grado 10° - Institución Privada- Tareas 1, 2 y 3



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL  
*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Maestría en Docencia de la Matemática  
Luis Castro - Carlos Forero

Nombres: Verónica Maldonado Restrepo Grado: 10 Fecha: 18/06/19  
Andrei Felipe Ruiz Lamprea  
Situación 1. Industria alimenticia

Ustedes son una pareja de ingenieros encargados de la fabricación de recipientes metálicos usados en la industria alimenticia. Como ingenieros tienen la tarea de diseñar este recipiente atendiendo a las especificaciones del cliente y garantizando el mejor uso de las materias primas disponibles; esto significa que maximizan los recursos en la pieza.

#### Especificaciones del cliente:

El cliente ha pedido que el recipiente tenga forma rectangular, sin tapa, y esté fabricado a partir de una lámina de metal resistente a la oxidación y cuya capacidad de almacenamiento sea la mayor posible.

Para la elaboración de la caja sin tapa se cuenta con láminas rectangulares de acero de medidas  $25\text{cm} \times 35\text{cm}$ . Cuentan con una máquina troqueladora que retira piezas cuadradas de las esquinas de la lámina y otra máquina llamada dobladora que recibe la pieza troquelada para doblar las caras y así formar la caja.

En el archivo de GeoGebra se presenta una simulación de la situación. En ella se ven 4 espacios cuadrados en las esquinas de la lámina, esos cuadrados han sido retirados por la troqueladora.

Se establece que  $x$  corresponde a la medida del lado del recorte cuadrado que se quita de las esquinas,  $f$  corresponde al fondo de la caja,  $h$  corresponde a la altura de la caja,  $v$  corresponde al volumen de la caja. Llamaremos salto ( $\Delta$ ) al valor del cambio de estado, por ejemplo,  $\Delta v$  corresponde al salto del valor del volumen.

A partir de la modelación en GeoGebra responda las siguientes preguntas:

No	Pregunta	Respuesta – justificación
1	En la situación presentada, ¿Qué es lo que cambia?	Dependiendo de la variación de $x$ , cambia la medida de la altura, largo, fondo y volumen
2	¿De qué dependen las magnitudes cambiantes?	Dependen de la medida de $x$ , ya sea que aumentan o disminuyen
3	¿De qué depende el volumen de la caja? Justifique su respuesta.	Depende de el fondo, el largo y la altura, que es igual a $x$ , ya que todos los valores



Scanned with  
CamScanner

dependen de la variación de  $x$ .

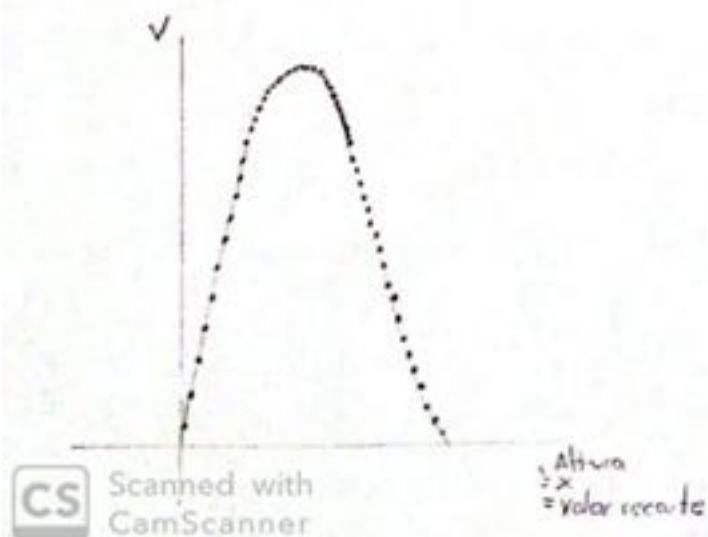
Volumen gráficamente es una parábola, ya que con el aumento  $x$ , aumenta el volumen, hasta cierto punto, donde comienza a disminuir, haciendo que la caja sea más angosta.

4	¿Cómo cambia el volumen y el largo de la caja? Justifique su respuesta.	El largo es inversamente proporcional a la medida de $x$ , entre más aumenta $x$ , el largo y el ancho disminuyen.
5	¿Existe un intervalo en el que el volumen crece o decrece más rápido? Si es así, ¿cuál? Justifique su respuesta.	Si, cuando el valor de $x$ es menor la altura, está entre 0 y 2, la evidencia que el volumen aumenta más rápido, porque el largo y el ancho en este punto tienen medidas muy grandes.
6	¿Para qué valor del recorte se obtiene el máximo volumen?	Para cuando $x$ vale 1,8, porque el volumen máximo que alcanza la caja es de 1371,562, en este punto.
7	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se relaciona el volumen con la medida del recorte de la caja.	Bosquejo
8	¿La exploración con el software les facilitó realizar la tarea? Explique su respuesta.	Si, bastante, porque nos facilitó ver como variaban las medidas de la caja y como se presentaban las gráficas para cada uno de ellos.

Preguntas para la entrevista de cierre (al finalizar las actividades)

Ustedes como hicieron para saber que cambia en la situación

Si ustedes no hubiesen utilizado tecnología, sus respuestas seguiría siendo la misma







UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Maestría en Docencia de la Matemática  
Luis Castro - Carlos Forero

Nombres: Verónica HERNÁNDEZ RESTrepo Grado: 10 Fecha: 18/06/19  
Andrés Felipe Ruiz Lamprea  
Actividad 2 "El cliente cansón"

Un arquitecto diseñó un tanque de forma cúbica para un cliente. El diseño se hizo con un lado de 2 metros de longitud, obteniendo un tanque con capacidad (volumen) de  $8 \text{ m}^3$ .

1- El arquitecto entregó el diseño al cliente, pero este le solicitó modificarlo de tal manera que el tanque mantuviera su forma cúbica, pero que su capacidad aumentara 2 metros cúbicos, es decir, que ahora tuviera una capacidad de  $10 \text{ m}^3$ .

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

Debe aumentar la medida de los lados a $2,15 \text{ m}$ , para que el volumen sea aproximadamente $10 \text{ m}^3$ $\sqrt[3]{10} = 2,1544$

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

Deben medir los lados $2,1544 \text{ m}$ + Debe ajustarse la medida de los lados en $0,1544 \text{ m}$ $\sqrt[3]{10} = 2,1544$

2- El cliente revisó el diseño del tanque y decidió aumentar otros  $2 \text{ m}^3$  al volumen del tanque.

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

Para que el volumen sea $12 \text{ m}^3$ , debe necesariamente aumentar la medida de los lados



Scanned with  
CamScanner

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

→ Todos los lados deben medir 2,2894 m  
 → Debe aumentar en 0,135 m, de la medida del lado  
 $\sqrt[3]{12} = 2,2894 \text{ m}$        $\begin{matrix} \swarrow 2,2894 - 2,1544 \\ \searrow 0,135 \text{ m} \end{matrix}$

3- El cliente había olvidado unos requerimientos de su familia y solicitó al arquitecto aumentar otros  $2 \text{ m}^3$  al volumen del tanque.

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

Para que el volumen sea  $14 \text{ m}^3$  debe nuevamente aumentar la medida de los lados

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

→ Todos los lados ahora deben medir 2,4 m  
 → Debe aumentar en 0,1106 m, de la medida del lado  
 $\sqrt[3]{14} = 2,4 \text{ m}$        $\begin{matrix} \swarrow 2,4 - 2,2894 \\ \searrow 0,1106 \text{ m} \end{matrix}$

4- El cliente quiere saber en cuánto debe cambiar la medida del lado siempre que se desee aumentar el volumen en  $2 \text{ m}^3$ . Ayúdalo al arquitecto a elaborar un procedimiento o fórmula. Redacta un párrafo y explícale al cliente el(los) procedimientos que debería realizar para tal petición.

Estimado cliente, recibo de mi parte un cordial saludo...  $V_2 = 1^3$

$V_1 = \text{Volumen inicial}$       1.  $\sqrt[3]{V_1 + 2} = M_2$   
 $M_1 = \text{Medida lado inicial}$       2.  $M_2 - M_1 = \text{Lo que debe aumentar}$   
 $M_2 = \text{Medida lado final}$

Estimado Cliente, recibo de mi parte un cordial saludo por medio de esta le presento la fórmula para hallar cuánto debe aumentar en la medida del lado, cada vez que quiera aumentar en  $2 \text{ m}^3$  el volumen.



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Maestría en Docencia de la Matemática  
Luis Castro - Carlos Forero

### Actividad 3 "La central de servicios"

Ustedes son los jefes de seguridad industrial de una central de servicios. Uno de sus roles es analizar y pronosticar los cambios que se dan en los tanques de líquidos inflamables, que manejan en dicha entidad y enviar un informe al gerente de la empresa respondiendo ciertas preguntas que desea conocer. Para ayudarles a la comprensión de los fenómenos el gerente les envió una simulación realizada en GeoGebra. Los tanques que deben analizar son el A (compuesto por formas cilíndricas) y el B (compuesto por figuras mixtas). A continuación, la ficha técnica de cada tanque y la simulación en Geogebra a partir de la cual se solicita realizar el informe de gestión.

Ficha técnica	Radio mayor	altura	Radio menor	altura	Razón de llenado
Tanque A:	3m	2m	1.5 m	2m	3m <sup>3</sup> /h

#### INFORME DE GESTIÓN Y ANÁLISIS LA CENTRAL DE SERVICIOS- TANQUE A

NOMBRES: YENÓNICA MALDONADO RESTREPO / ANDRÉS FELIPE RUIZ LAMPIEA

GRADO: 10

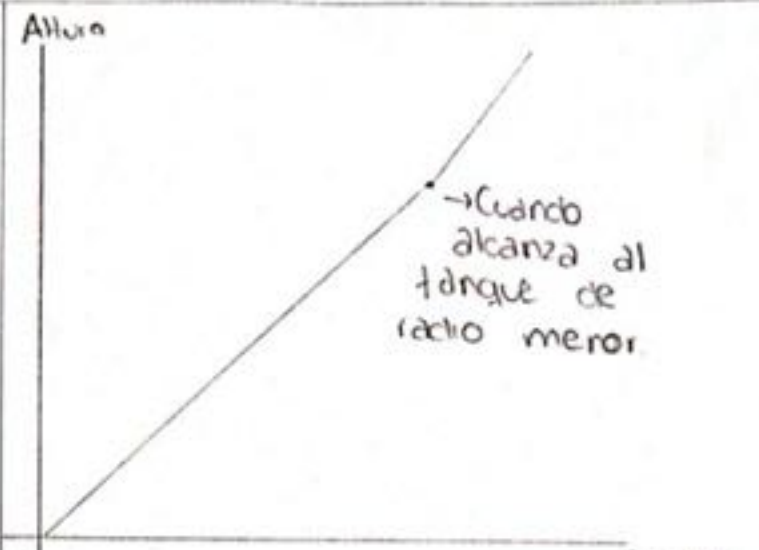
FECHA: 18/06/19.

No	Pregunta	Respuesta - justificación
1	En el tanque A, ¿Qué es lo que cambia? Justifiquen su respuesta	El tiempo y los metros cúbicos (m <sup>3</sup> ) del líquido inflamable que contiene el tanque.
2	Describan ¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?	Cambia en razón al tiempo, el decir cuando el tiempo aumenta, los m <sup>3</sup> contenidos en el tanque también aumentan. Pero cuando llega a la parte del radio menor se llena más rápido,

porque su volumen es menor.



Scanned with  
CamScanner

3	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo	
4	Podrían establecer una manera para especificar ¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo? ¿Qué datos requieres para ello?	<p>→ Cada 0,06s la altura del liquido aumenta en <math>0,01\text{m}^3</math></p> <p>→ Analizar con varios datos cual es la variación</p> <p>→ Cuando llega al tanque de radio menor su altura aumenta en <math>0,01\text{m}^3</math> cada 0,02s</p>
5	¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del liquido en el tanque?	<p>→ Tanque de radio mayor:</p> $\frac{0,01}{0,06} = \frac{1\text{m}^3}{6\text{s}}$ <p>→ Tanque de radio menor:</p> $\frac{0,01}{0,02} = \frac{1\text{m}^3}{2\text{s}}$



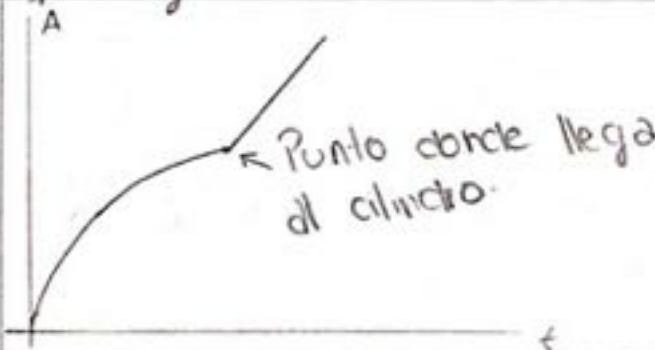
Ficha técnica	Radio mayor	altura	Radio menor	altura	Razón de llenado
Tanque B:	3m	2m	1.5 m	2m	3m <sup>3</sup> /h

INFORME DE GESTIÓN Y ANÁLISIS LA CENTRAL DE SERVICIOS- TANQUE B

NOMBRES:

GRADO:

FECHA:

No	Pregunta	Respuesta - justificación
1	En el tanque B, ¿Qué es lo que cambia? Justifiquen su respuesta	El tiempo y los metros cúbicos del líquido inflamable que contiene el tanque y la parte de abajo está en forma de cono y no de cilindro
2	Describan ¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?	Cómo la parte inferior es en forma de cono, por lo tanto al inicio de este el tanque se llena más rápido y cada vez que la altura en el cono, se vuelve más lento, hasta que llega al cilindro donde ya es constante
3	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo	
4	Podrían establecer una manera para especificar ¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo? ¿Qué datos requieres para ello?	En el cono la altura cada vez va a aumentar más lento y ya en el cilindro está constante, y se requiere tomar la altura del líquido en diferentes intervalos
5	¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?	$\frac{0.001 \text{ m}^3}{0.01 \text{ s}} \rightarrow \text{Cilindro}$




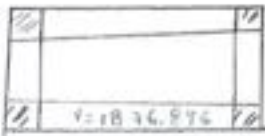
Scanned with  
CamScanner

$\tau$	A
0,01	0,229
0,02	0,288
0,03	0,33
0,04	0,363



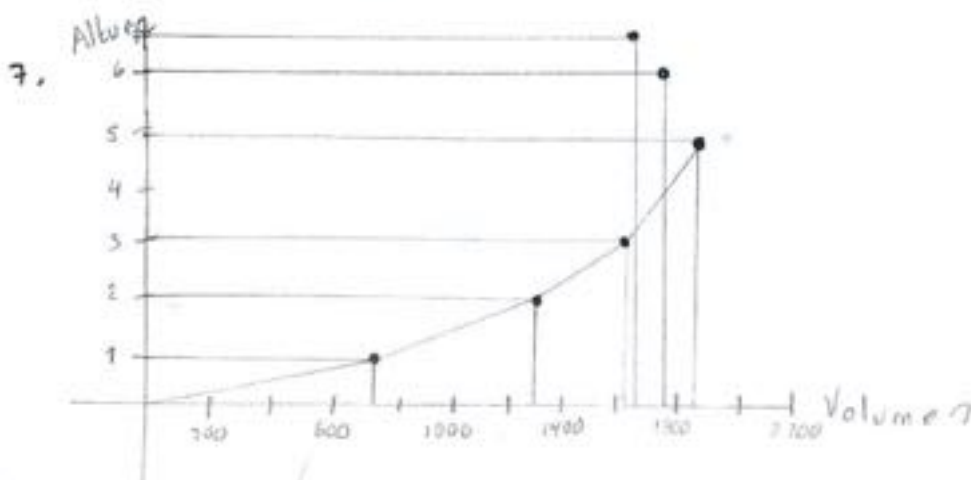
### 7.3 Anexos grado 9° - Institución de carácter Público- Tareas 1, 2 y 3

	<b>NACIONAL</b> Educación de Educación	INSTITUTO VICE-RECTORAL DE INVESTIGACIÓN Luis Castro - Carlos Forero
Nombres: _____ Grado: _____ Fecha: _____		
<b>Actividad 1. Industria alimenticia</b>		
<p>Ustedes son una pareja de ingenieros encargados de la fabricación de recipientes metálicos usados en la industria alimenticia. Como ingenieros tienen la tarea de diseñar este recipiente atendiendo a las especificaciones del cliente y garantizando el mejor uso de las materias primas disponibles; esto significa que maximizan los recursos en la pieza.</p>		
<p><b>Especificaciones del cliente:</b></p> <p>El cliente ha pedido que el recipiente tenga forma rectangular, sin tapa, y esté fabricado a partir de una lámina de metal resistente a la oxidación y cuya capacidad de almacenamiento sea la mayor posible.</p> <p>Para la elaboración de la caja sin tapa se cuenta con láminas rectangulares de acero de medidas 25cm × 35cm. Cuentan con una máquina troqueladora que retira piezas cuadradas de las esquinas de la lámina y otra máquina llamada dobladora que recibe la pieza troquelada para doblar las caras y así formar la caja.</p> <p>En el archivo de GeoGebra se presenta una simulación de la situación. En ella se ven 4 espacios cuadrados en las esquinas de la lámina, esos cuadrados han sido retirados por la troqueladora.</p> <p>Se establece que <math>x</math> corresponde a la medida del lado del recorte cuadrado que se quita de las esquinas, <math>f</math> corresponde al fondo de la caja, <math>h</math> corresponde a la altura de la caja, <math>v</math> corresponde al volumen de la caja. Llamaremos <b>salto</b> (<math>\Delta</math>) al valor del cambio de estado, por ejemplo, <math>\Delta v</math> corresponde al salto del valor de volumen.</p> <p>A partir de la modelación en GeoGebra responda las siguientes preguntas:</p>		
No	Pregunta	Respuesta – justificación
1	En la situación presentada, ¿Qué es lo que cambia?	<p>En la simulación presentada los ingenieros van cambiando su volumen dependiendo del tamaño del recorte de los huecos cuadrados de la esquina de la lámina.</p>
2	¿De qué dependen las magnitudes cambiantes?	<p>Las magnitudes cambiantes como la altura y el volumen dependen del tamaño del corte que se realiza en las esquinas de la lámina con la troqueladora.</p>
3	¿De qué depende el volumen de la caja? Justifique su respuesta.	<p>el volumen depende de la altura y el largo de la caja y estos dependen a su vez del tamaño que se realiza con la troqueladora por lo que son magnitudes cambiantes dentro de la situación.</p>

4	¿Cómo cambia el volumen y el largo de la caja? Justifique su respuesta.	Cambian según el tamaño del corte que se realice en los cuadrados de la imagen con la troqueladora. Esto es igual al sulco que se realice en $V(\Delta V)$ .
5	¿Existe un intervalo en el que el volumen crece o decrece más rápido? Si es así, ¿cuál? Justifique su respuesta.	Se cree - crece cuando el intervalo en $x$ va de 0,1 a 4,9 y decrece el intervalo va de 4,9 a 12,1 ya que existe una relación de proporcionalidad con la medida $x$ .
6	¿Para qué valor del recorte se obtiene el máximo volumen?	El mayor volumen se obtiene cuando el valor de recorte llega a 4,9 cm alcanzando 1876.846 de volumen.
7	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se relaciona el volumen con la medida del recorte de la caja.	
8	¿La exploración con el software les facilitó realizar la tarea? Explique su respuesta.	Sí por que nos facilitó los cálculos y podemos observar los cambios de la caja cuando el recorte en $x$ va cambiando.

Preguntas para la entrevista de cierre (al finalizar las actividades)

- Ustedes como hicieron para saber que cambia en la situación
- Si ustedes no hubiesen utilizado tecnología, sus respuestas seguiría siendo la misma
- Observando con atención la gráfica y la relación entre sus variables
- No creo, por que la tecnología nos brinda muchos datos automáticamente, sin la necesidad de hacerlos a mano.







UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

*Escuela de Educación*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Maestría en Docencia de la Matemática  
Luis Castro - Carlos Forero

Nombres: Iraísa - Harold Grado: 9 Fecha: 30-7-19

**Actividad 2 "El cliente cansón"**

Un arquitecto diseñó un tanque de forma cúbica para un cliente. El diseño se hizo con un lado de 2 metros de longitud, obteniendo un tanque con capacidad (volumen) de  $8 \text{ m}^3$ .

1- El arquitecto entregó el diseño al cliente, pero este le solicitó modificarlo de tal manera que el tanque mantuviera su forma cúbica, pero que su capacidad aumentara 2 metros cúbicos, es decir, que ahora tuviera una capacidad de  $10 \text{ m}^3$ .

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

El Arquitecto debe aumentar la medida de los  
los lados del cubo para así mismo obtener  
mayor capacidad.

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

Lo medido de los lados del tanque debe  
ser de  $2.154 \text{ m}$  para tener una capacidad de  $10 \text{ m}^3$   
este es el dato que se busca para  
diseñar

2- El cliente revisó el diseño del tanque y decidió aumentar otros  $2 \text{ m}^3$  al volumen del tanque.

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

El Arquitecto debe aumentar la medida de los  
lados del cubo para así mismo obtener  
mayor capacidad en el cubo.

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

Si queremos que el volumen sea de  $12 \text{ cm}^3$  la medida de sus lados debe ser aproximadamente  $2.289$  y  $2.29$ ... no brindamos una solución exacta por que apesar de que la herramienta no brinda dato exacto, sin calcular no nos permite hacer un salto más pequeño entre sus dimensiones

3. El cliente había olvidado unos requerimientos de su familia y solicitó al arquitecto aumentar otros  $2 \text{ m}^3$  al volumen del tanque.

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

El Arquitecto debe aumentar la medida de los lados de la caja para a su vez aumentar el volumen de la caja según los requerimientos del cliente

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

$2.410747765 = \sqrt[3]{14.2857142857}$  y no hallamos una respuesta exacta ya que apesar de que tenemos una herramienta que nos brinda dato muy exacto y preciso sus intervalos no pueden tener más de 7 cifras y la solución más exacta que nos brinda el programa es la de arriba

4. El cliente quiere saber en cuánto debe cambiar la medida del lado siempre que se desee aumentar el volumen en  $2 \text{ m}^3$ . Ayúdalo al arquitecto a elaborar un procedimiento o fórmula. Redacta un párrafo y explícale al cliente el(los) procedimientos que debería realizar para tal petición.

Estimado cliente, recibe de mi parte un cordial saludo...

Si quieres aumentando el volumen del tanque  $2 \text{ m}^3$  debe utilizar la herramienta que nos brinda el resultado aunque en algunas ocasiones la respuesta puede ser un poco dependiente ya que hay que hacer varios valores de la medida de sus lados para poder hallar un volumen exacto al haber  $2 \text{ m}^3$  en cualquier otro volumen más sencillo por hallar así su incremento sea de uno por ejemplo el volumen 1 el volumen 8 que fue el inicio que nos brindaron el volumen 23 y 64



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Maestría en Docencia de la Matemática  
Luis Castro - Carlos Forero

### Actividad 3 "La central de servicios"

Ustedes son los jefes de seguridad industrial de una central de servicios. Uno de sus roles es analizar y pronosticar los cambios que se dan en los tanques de líquidos inflamables, que manejan en dicha entidad y enviar un informe al gerente de la empresa respondiendo ciertas preguntas que desea conocer. Para ayudarles a la comprensión de los fenómenos el gerente les envió una simulación realizada en GeoGebra. Los tanques que deben analizar son el A (compuesto por formas cilíndricas) y el B (compuesto por figuras mixtas). A continuación, la ficha técnica de cada tanque y la simulación a partir de la cual se solicita realizar el informe de gestión.


Ficha técnica	Radio mayor	altura	Radio menor	altura	Razón de llenado
Tanque A:	3m	2m	1.5 m	2m	3m <sup>3</sup> /h

#### INFORME DE GESTIÓN Y ANÁLISIS LA CENTRAL DE SERVICIOS- TANQUE A

NOMBRES: *Ivaloe - Harold*

GRADO:

FECHA:

No	Pregunta	Respuesta – justificación
1	En el tanque A, ¿Qué es lo que cambia? Justifiquen su respuesta	<i>En el tanque A, lo que cambia es muy común ya que este es un cilindro mixto, una encima del otro, tiene una variación entre tiempo y altura, una vez se comienza el llenado de la altura.</i>
2	Describan ¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?	<i>La altura del líquido que se encuentra en el tanque, aumenta según el tiempo que se va llenando. Cuando también de la parte que se está llenando del cilindro, por ejemplo la parte inferior con un radio de 3m, por ejemplo el doble de tiempo en llenarse en comparación con el cilindro superior radio menor 1.5m.</i>
3	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo	



4	Podrían establecer una manera para especificar ¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo? ¿Qué datos requieres para ello?	Si pero el resultado sería un valor aproximado del valor de la altura del líquido respecto al tiempo que lleva llenándose el tanque. La altura aumenta en relación en la que aumenta el tiempo, radio el tiempo altura del líquido y el tanque
5	¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?	Si, aunque eso depende del radio, en el cilindro mayor la altura del líquido crece cada hora un aproximado de 0,8 metros, mientras en el cilindro superior aumenta el nivel de líquido cada hora por que tiene un radio de 1,5.

Ficha técnica	Radio mayor	altura	Radio menor	altura	Razón de llenado
Tanque B:	4	2m	2	2m	3m <sup>3</sup> /h

### INFORME DE GESTIÓN Y ANÁLISIS LA CENTRAL DE SERVICIOS- TANQUE B

**NOMBRES:**

**GRADO:**

**FECHA:**

No	Pregunta	Respuesta - justificación
1	En el tanque B, ¿Qué es lo que cambia? Justifiquen su respuesta	En el tanque B, cambia el radio ya que con dos figuras iguales de diferente radio y ambos no son cilindros, uno es un cilindro y posee el radio menor (está ubicado encima del cono que parte en la parte de abajo), y está boca arriba.
2	Describan ¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?	existe una relación entre tiempo y altura por que las dos aumentan simultáneamente, si se llena una vez, la altura exacta a medida que aumenta el tiempo es la misma.
3	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo	El tiempo que que el radio mayor del tanque B no posee una figura completa por que es un cono y un cono es la tercera parte de un cilindro.
4	Podrían establecer una manera para especificar ¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo? ¿Qué datos requieres para ello?	No, por que su primera parte no es una figura exacta o completa, es un cono. Requería para ello el tiempo, radio y la altura.
5	¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?	Si es posible, gracias a la herramienta que estamos utilizando, aunque manualmente es más extenso, por que nos brinda dos datos automáticamente el tiempo y la altura del líquido.

# Tanque A.

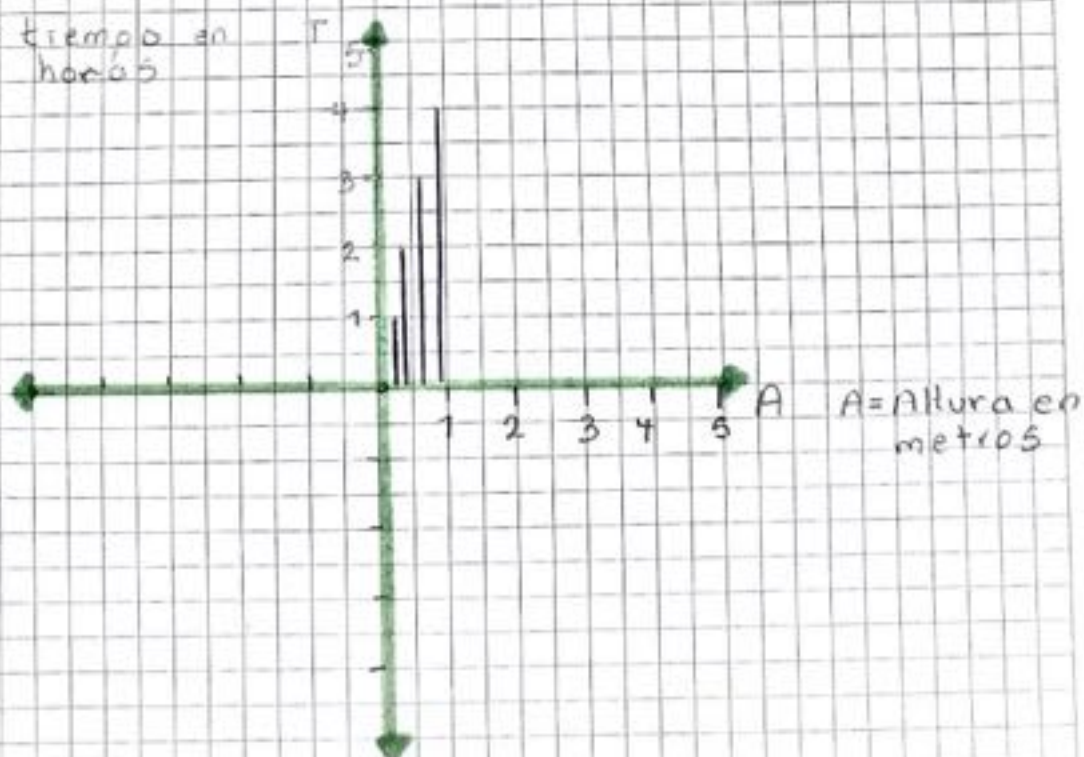
Tiempo	Altura
1 hora	0,18 metros
2 hrs	0,35 metros
3 hrs	0,53 metros
4 hrs	0,71 metros
5 hrs	0,88 metros
6 hrs	1,06 metros
7 hrs	1,24 metros
8 hrs	1,41 m
9 hrs	1,59 "
10 hrs	1,77 "
11 "	1,95 "
12 "	2,49 "
13	3,2 "
14	3,9 "
14,137	3,99

Grado 4º

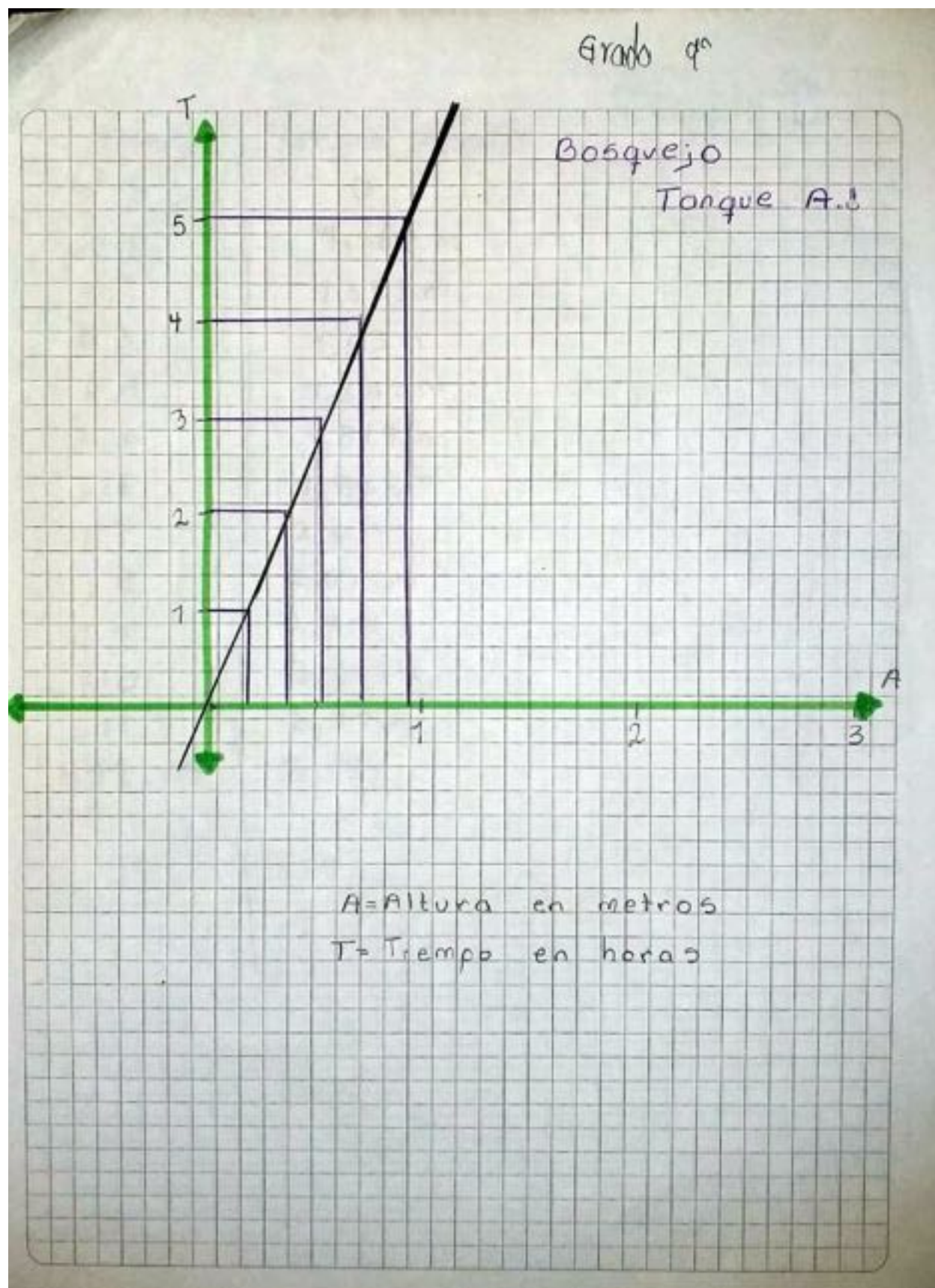
Torque A.



T = tiempo en horas








Tanque B

Tiempo	Altura líquido
A 0	0
B 1	1,061 m
C 2	1,337 m
D 3	1,53 m
E 4	1,684 m
F 5	1,814 m
G 6	1,928 m
H 7	2,119 m
I 8	2,576 m
J 9	2,914 m
K 10	3,312 m
L 11	3,71 m
M 12, 129	3,999



## 7.4 Anexos grado 10° - Institución de carácter Público- Tareas 1, 2 y 3



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**  
*Educadora de educadores*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
*Maestría en Docencia de la Matemática*  
Luis Castro - Carlos Forero

---

Nombres: Hugo Herrera - Jonathan Herrera Grado: 10° Fecha: \_\_\_\_\_

**Industria alimenticia**


Ustedes son una pareja de ingenieros encargados de la fabricación de recipientes metálicos usados en la industria alimenticia. Como ingenieros tienen la tarea de diseñar este recipiente atendiendo a las especificaciones del cliente y garantizando el mejor uso de las materias primas disponibles; esto significa que maximizan los recursos en la pieza.

**Especificaciones del cliente:**  
El cliente ha pedido que el recipiente tenga forma rectangular, sin tapa, y esté fabricado a partir de una lámina de metal resistente a la oxidación y cuya capacidad de almacenamiento sea la mayor posible.  
Para la elaboración de la caja sin tapa se cuenta con láminas rectangulares de acero de medidas 25cm × 35cm. Cuentan con una máquina troqueladora que retira piezas cuadradas de las esquinas de la lámina y otra máquina llamada dobladora que recibe la pieza troquelada para doblar las caras y así formar la caja.  
En el archivo de GeoGebra se presenta una simulación de la situación. En ella se ven 4 espacios cuadrados en las esquinas de la lámina, esos cuadrados han sido retirados por la troqueladora.

Se establece que  $x$  corresponde a la medida del lado del recorte cuadrado que se quita de las esquinas,  $f$  corresponde al fondo de la caja,  $h$  corresponde a la altura de la caja,  $v$  corresponde al volumen de la caja. Llamaremos **salto** ( $\Delta$ ) al valor del cambio de estado, por ejemplo,  $\Delta v$  corresponde al salto del valor del volumen.

A partir de la modelación en GeoGebra responda las siguientes preguntas:

No	Pregunta	Respuesta – justificación
1	En la situación presentada, ¿Qué es lo que cambia?	Cambia la altura ( $h$ ) y el volumen ( $v$ ) del recipiente
2	¿De qué dependen las magnitudes cambiantes?	Depende del corte de la troqueladora porque esta permite cortar las esquinas de la lámina para que la dobladora las doble
3	¿De qué depende el volumen de la caja? Justifique su respuesta.	Depende del corte de la troqueladora porque si corta un poco las esquinas de la lámina la caja quedará con más volumen y menor altura

4	¿Cómo cambia el volumen y el largo de la caja? Justifique su respuesta.	El volumen cambia dependiendo de la altura de la caja porque si <del>para</del> disminuyo el largo gano altura
5	¿Existe un intervalo en el que el volumen crece o decrece más rápido? Si es así, ¿cuál? Justifique su respuesta	Si no hay (h) 0.246 y (w) 208.04765; va decreciendo porque la caja va aumentando su altura y largo
6	¿Para qué valor del recorte se obtiene el máximo volumen?	El mayor valor del volumen se obtiene cuando la h esta en 4.75 cm
7	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se relaciona el volumen con la medida del recorte de la caja.	
8	¿La exploración con el software les facilitó realizar la tarea? Explique su respuesta	Si porque se puede cortar y doblar sin dañar nada y en menos tiempo y se puede ver como va quedando el modelo de la caja

Preguntas para la entrevista de cierre (al finalizar las actividades)



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

*Educadora de Educadoras*

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Maestría en Docencia de la Matemática  
Luis Castro - Carlos Forero

Nombres: Hugo Herrera - Jonathan Herrera Grado: 10<sup>o</sup> Fecha: 30/07/19

**Actividad 2 "El cliente cansón"**

Un arquitecto diseñó un tanque de forma cúbica para un cliente. El diseño se hizo con un lado de 2 metros de longitud, obteniendo un tanque con capacidad (volumen) de  $8 \text{ m}^3$ .

1- El arquitecto entregó el diseño al cliente, pero este le solicitó modificarlo de tal manera que el tanque mantuviera su forma cúbica, pero que su capacidad aumentara 2 metros cúbicos, es decir, que ahora tuviera una capacidad de  $10 \text{ m}^3$ .

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

El arquitecto debe modificar el tanque aumentando  $755 \text{ cm}$  de más a la longitud, quedando de  $2.755 \text{ m}$  de longitud, para que el tanque pueda aumentar su capacidad a  $10 \text{ m}^3$ .

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

Las medidas del tanque deben ser de  $2.755 \text{ m}$  de longitud, ajustando  $755 \text{ cm}$  a lo que ya tenía, porque ajustando esto  $755 \text{ cm}$  de más, puede hacer que la capacidad aumente  $2 \text{ m}^3$  y así poder cumplir la solicitud del cliente.

2- El cliente revisó el diseño del tanque y decidió aumentar otros  $2 \text{ m}^3$  al volumen del tanque.

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

El arquitecto debe aumentar otros  $755 \text{ cm}$  más de longitud al tanque, para que este pueda aumentar su capacidad y poder cumplir las exigencias del cliente cansón.



b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

El tanque debe tener una longitud de 2.310 m  
ajustando 155 cm más al anterior y 310 cm al  
tanque original que solo tenía una capacidad de  
 $8 \text{ m}^3$

3- El cliente había olvidado unos requerimientos de su familia y solicitó al arquitecto aumentar otros  $2 \text{ m}^3$  al volumen del tanque.

a) ¿Cómo debe modificar el arquitecto el diseño del tanque?

El arquitecto debe aumentar otros 155 cm al anterior  
modificado, ya en total modificando o aumentando  
465 cm al original, para que este tanque quede  
con una capacidad de  $14 \text{ m}^3$ , que son las exigencias  
totales del cliente consón.

b) ¿Qué medidas debe tener ahora el tanque? ¿Cuánto debe ajustar? Justifica tu respuesta

Debe tener una medida de longitud 2465 m  
con una capacidad de volumen de  $14 \text{ m}^3$ .

4- El cliente quiere saber en cuánto debe cambiar la medida del lado siempre que se desee aumentar el volumen en  $2 \text{ m}^3$ . Ayúdalo a arquitecto a elaborar un procedimiento o fórmula. Redacta un párrafo y explícale al cliente el(los) procedimientos que debería realiza para tal petición.

Estimado cliente, recibe de mi parte un cordial saludo... Para poder responder a su  
(el cliente) inquietud, lo que se debe hacer para  
aumentar  $2 \text{ m}^3$  cada vez que lo desee, debe aumentar  
155 cm a la longitud del tanque, o sea diciendoselo  
como una fórmula, sería...

longitud actual del tanque + 155 cm =  $2 \text{ m}^3$  más de  
capacidad



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA  
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Maestría en Docencia de la Matemática  
Luis Castro - Carlos Forero

### Actividad 3 "La central de servicios"

Ustedes son los jefes de seguridad industrial de una central de servicios. Uno de sus roles es analizar y pronosticar los cambios que se dan en los tanques de líquidos inflamables, que manejan en dicha entidad y enviar un informe al gerente de la empresa respondiendo ciertas preguntas que desea conocer. Para ayudarles a la comprensión de los fenómenos el gerente les envió una simulación realizada en GeoGebra. Los tanques que deben analizar son el A (compuesto por formas cilíndricas) y el B (compuesto por figuras mixtas). A continuación, la ficha técnica de cada tanque y la simulación a partir de la cual se solicita realizar el informe de gestión.

Ficha técnica	Radio mayor	altura	Radio menor	altura	Razón de llenado
Tanque A:	3m	2m	1.5 m	2m	3m/h

#### INFORME DE GESTIÓN Y ANÁLISIS LA CENTRAL DE SERVICIOS- TANQUE A

NOMBRES: Jonathan Herrera Hugo Herveira,

GRADO: Derimo.

FECHA:

No	Pregunta	Respuesta - justificación
1	En el tanque A, ¿Qué es lo que cambia? Justifiquen su respuesta	La altura del líquido inflamable dentro del tanque según el tiempo, entre más tiempo se este llenando pues va a estar subiendo la altura del líquido en el tanque
2	Describan ¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?	Cambia la rapidez (del radio menor) de llenado del cilindro de mayor radio con la del menor porque tiene más capacidad el cilindro del radio mayor lo que hace que se demore menos el de radio menor ya que no tiene la misma capacidad
3	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo	



4	Podrían establecer una manera para especificar ¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo? ¿Qué datos requieres para ello?	La altura cambia aproximadamente 0.18m cada hora, pero esto se requiere razón de llenado, tiempo y altura, esto en el cilindro del radio mayor. En el cilindro de radio menor se demora 4 veces menos que el cilindro de mayor radio ya que tiene la mitad de radio que el del mayor.
5	¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?	La rapidez del llenado del cilindro de mayor radio es de 0.18m constantes por hora, pero cuando acaba sus 2 metros de altura a las 4.31 horas transcurridas, empieza con el cilindro de la mitad de su radio, avanzando 4 veces más rápido que el cilindro de mayor radio.

Ficha técnica	Radio mayor	altura	Radio menor	altura	Razón de llenado
Tanque B:	4m	2m	2m	2m	3m/h

**INFORME DE GESTIÓN Y ANÁLISIS LA CENTRAL DE SERVICIOS- TANQUE B**

**NOMBRES:** Jonathan Herrera      Hugo Herrera.

**GRADO:** Décimo.      **FECHA:**

No	Pregunta	Respuesta - justificación
1	En el tanque B, ¿Qué es lo que cambia? Justifiquen su respuesta	La altura del líquido dentro del tanque según el tiempo. Entre más tiempo entre más tiempo este llenando, pues va a estar subiendo la altura del líquido en el tanque.
2	Describan ¿Cómo cambia la altura del líquido contenido en el tanque?	Cambia la rapidez de llenado, en el caso se demora más el líquido a medida que va subiendo en cambio en el cilindro la velocidad de llenado es constante.
3	Realicen un bosquejo de la gráfica en la que se represente el cambio de la altura Vs tiempo	Una manera
4	Podrían establecer una manera para especificar ¿Cuánto cambia la altura con respecto al tiempo? ¿Qué datos requieres para ello?	Una manera para especificar cuanto cambia la altura con el tiempo, requerimos datos como la altura de llenado en metros y el tiempo en horas, para así ir llenando una hora y poder saber cuanto lleno en metros de altura y ir midiendo cuanto va subiendo la altura, según las horas y restar la hora de llenado siguiente con la anterior para poder saber cuanto hay de diferencia de llenado entre cada hora.
5	¿Es posible conocer la rapidez con la que cambia la altura del líquido en el tanque?	Es posible porque tenemos una figura en 3D que nos muestra como cambia la rapidez la podemos saber exactamente utilizando el método mencionado en la anterior pregunta.

